Exercice 1

Soit une série de fonctions : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$

1. Soit $I = [0,1[$

$$\sum x^{2n} = \sum (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^N}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

Donc la série converge simplement vers $\frac{1}{1-x^2}$ sur I.

2. Soit $I = [0,a]$ avec $a \in]0,1[$

$\|x^{2n}\|_I = a^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ lorsque car $a<1$

La série de terme générale a^{2n} converge, donc

$\sum x^{2n}$ converge normalement $\Rightarrow$ uniformement sur $[0,a]$.

3. Soit $I = [0,1[$ On suppose que la série converge uniforment vers $S(x) = \frac{1}{1-x^2}$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N-1} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right|$$

$$= \frac{(x^2)^{N+1}}{1-x^2} = \frac{x^{2N+1}}{1-x^2}$$

Prenons $x_N = 1 - \frac{1}{N}$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{2N+2\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{1-1+\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}} = \frac{e^{2N+2\left(-\frac{1}{N}\right)}}{\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}}$$

$$= \frac{e^{-2}}{\frac{2N-1}{N^2}} = N^2\frac{e^{-2}}{2N-1} \sim \frac{N}{e^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc le supremum du reste tend vers $+\infty$ en un point, ce qui signifie que la série ne tend pas uniformement vers $\frac{1}{1-x^2}$ sur $[0,1[$

Exercice 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. On utilise la règle de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2 \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc la série converge simplement sur $]0,+\infty[$

2) $\sup \left| \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \right| \leq \frac{e^{-nx}}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$

On applique encore la règle de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$n^2 \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\sum \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge

donc la série converge.

3) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

si $x \in [0,1[$ $x^n \longrightarrow 0 \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow 0$

si $x = 1$ $f_n(x) = \frac{1}{2}$

si $x > 1$ $x^n \longrightarrow +\infty$ $f_n(x) \longrightarrow 1$

Alors $f_n(x)$ converge normalement vers $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Sur $[0,+\infty[$ il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne converge pas vers 0, donc $\sum f_n$ ne converge pas simplement, alors normalement non plus.

idem en $[0,1]$ car $f_n(1) = \frac{1}{2}$

Soit $a \in]0,1[$ et $\Gamma = [0,a]$

$$\|f_n(x)\|_\Gamma = \left\|\frac{x^n}{1+x^n}\right\|_{[0,a]} = \frac{a^n}{1} \leq a^n$$

$\sum a^n$ converge car $a < 1$, d'où la série converge normalement sur $[0,a]$

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$

$x = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$

$x \in]0,1[\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$x = 1$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$x \in]1,+\infty[$ $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$
mais cela ne suffit pas pour $\sum f_n$

pour $x>0$ $\quad \dfrac{x^2}{n^3+x^3} \leq \dfrac{x^2}{n^3}$ ce qui est une série de riemann avec $\alpha > 1$ donc $\sum \frac{x^2}{n^3}$ converge
ce qui implique la convergence de la série simplement.

$$f_n'(x) = \frac{2x(n^3+x^3) - 3x^2x^2}{(n^3+x^3)} = \frac{2xn^3+2x^4-3x^4}{(n^3+x^3)^2} = \frac{2xn^3-x^4}{(n^3+x^3)^2}$$

$$= \frac{x(2n^3-x^3)}{(n^3+x^3)^2}$$

$$f_n(n) = \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2n^3}$$

$$\sum f_n(x) \leq \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

x	0		$\sqrt[3]{2}\,n$	
$2x$	0			$+$
n^3-x^3		$+$	0	$-$
$(n^3+x^3)^2$			$+$	
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

③ $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$

$f_n(0) = 0$

si $x > 0$ $f_n(x) \leq \frac{x}{n^3}$ $\sum \frac{x}{n^3}$ converge, d'où

$\sum f_n(x)$ converge simplement

$$f_n'(x) = \frac{n^3+x^3-3x^3}{(n^3+x^3)^2} = \frac{n^3-2x^3}{(n^3+x^3)^2}$$

x	0		$\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
n^3-2x^3		$+$	0	$-$	
$(n^3+x^3)^2$			$+$		
$f_n'(x)$					
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\sim\frac{1}{n^2}$	$\searrow$	

$$f_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3+\frac{n^3}{2}} = \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{3n^3}{2}} = \frac{2n}{\sqrt[3]{2}\cdot 3\, n^3} \leq \frac{n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

d'où $\|f_n(x)\|_{[0,+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$ mais $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann, donc la série converge normalement.

Exercice 4

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions
$f_n : x \in [0,+\infty[\longmapsto \frac{e^{-nx}}{n^2}$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

e^{-nx} est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

1) d'où $f_n(0) = \frac{e^{-n \cdot 0}}{n^2} = \frac{1}{n^2} = \|f_n(x)\|_{[0,+\infty[}$

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car série de Riemann avec $\alpha=2>1$
donc la série $\sum f_n$ est convergente normalement sur $[0,+\infty[$

2) $\forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

Or f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ est d'après 1)
$\sum f_n$ converge normalement, donc uniformement
donc $f(x) = \sum f_n(x)$ (fonction limite) est aussi continue.

D'où $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3) Soit $a>0$, $I = [a,+\infty[$

On calcule $f_n'(x) = \left(\frac{e^{-nx}}{n^2}\right)' = \frac{-n e^{-nx}}{n^2} = \frac{-e^{-nx}}{n}$

$\left|-\frac{e^{-nx}}{n}\right| = \left\|\frac{e^{-nx}}{n}\right\|_{[a,+\infty[} = \frac{e^{-an}}{n} = \frac{(e^{-a})^n}{n} \leq (e^{-a})^n$

Or $a>0$, donc $0<e^{-a}<1$, donc $\sum e^{-an}$ est une série géométrique.
On a trouvé que f_n' est majorée par une suite dont la série converge, ce qui implique la convergence normale de $\sum f_n'$ sur $[a,+\infty[$

4) On a montré que $\sum f_n$ converge normalement donc simplement sur $[0,+\infty[\supset]0,+\infty[$ et que $\sum f'_n$ converge normalement sur $]0,+\infty[$
De plus f_n sont dérivable. Cela implique que $f'(x) = \sum f'_n(x) = \sum -\frac{e^{-nx}}{n} = -\sum \frac{e^{-nx}}{n}$

5) $\|f'_n\|_{[0,+\infty[} = \|f(0)\| = \frac{1}{n}$ dont la série harmonique diverge, ce qui dit que $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ ne converge pas normalement.

6) Soit $x \in]0, \frac{1}{n}[$ $\quad |f'_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[\supset]0, \frac{1}{n}[$

$\forall x \in]0, \frac{1}{n}[$
Alors $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |f'_k(x)| \geq |f'_{k+1}(x)|$

$$|f'(x)| = \left|-\sum \frac{e^{-nx}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k}\right)$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k}$$

$\forall k \leq n \quad e^{-1} < e^{-kx}$ car $kx < 1$
d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-1}}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{n}$
$\quad \| $
$e^{-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

D'où $|f'(x)| \geq e^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On sait que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge lorsque n tend vers $+\infty$

d'où $e^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Or $|f'(x)| \geq e^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$

7) f est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc par le thm des accroissements finis $\exists c_x \in]0,x[$, $\frac{f(x)-f(0)}{f(x)} = f'(c_x)$

Or $\lim\limits_{c \to 0} \frac{f(c)-f(0)}{c} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0.

8) Non. car $\sum f_n'$ n'est pas même convergente sur $[0,+\infty[$ car $\sum f_n'(0) = -\sum \frac{1}{n}$ qui est une série divergente.

Exercice 5

Partiel eCampus

$$\frac{u_n}{n} \leq u_n^2 \iff u_n \leq n\, u_n^2$$
$$\iff \sqrt{|u_n|} \leq \sqrt{n}\,\sqrt{u_n^2} = \sqrt{n}\,|u_n|$$
$$\iff \frac{\sqrt{|u_n|}}{|u_n|} \leq \sqrt{n}$$
$$\iff \frac{1}{\sqrt{|u_n|}} \leq \sqrt{n}$$ Ce qui est vrai pour $\forall n \geq N$ assez grand

D'où $\frac{u_n}{n}$ est majorée par u_n^2 avec $\sum u_n^2$
d'où $\sum \frac{u_n}{n}$ converge aussi.

(j) $\sum\left(\sqrt{n^2+\ln n} - n\right) =$

$$\sqrt{n^2+\ln n} - n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{\ln n}{n^2}\right)} - n$$
$$= n\sqrt{1+\frac{\ln n}{n}} - n$$
$$= n\left(\sqrt{1+\frac{\ln n}{n^2}} - 1\right)$$

$$n\left[1+\frac{\frac{\ln n}{n^2}}{2} - 1\right] = n\,\frac{\ln n}{2n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{2n}$$

Exercice 11

a) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{(n-4)^2}$$
$$= \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{1}{(x+3-4)^2} = \sum_{x=2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}$$

b) $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n-3}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)-3}{(n+1)(n+1-1)(n+1-2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-2)}{n(n^2-1)}$$

c) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)n} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} =$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!\,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Exercice 11

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{5^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{5^n} = -\left(\frac{1}{1+\frac{4}{5}} - 1\right) = -\left(\frac{1}{\frac{9}{5}} - 1\right) = -\left(\frac{5}{9} - 1\right)$

$= -\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}$

$S_{2n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n =$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}}_{= e} = 4e$

15 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$

$\frac{1}{n-\sqrt{n}} \quad \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-n} = \frac{n}{n^2-n} + \frac{\sqrt{n}}{n^2-n}$

$= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)}$

$= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(n-1)}$

$= \frac{1}{n-1}\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)$

g)
$$\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{n}\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 15

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

Etudions la convergence absolue:

$$\forall n \geq 2 \quad n-\sqrt{n} \leq n$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-\sqrt{n}}$$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison $\sum \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ diverge aussi.

Etudions la convergence simple, $\sum \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est une série alternée, donc elle converge si $\frac{1}{n-\sqrt{n}}$ décroît vers 0.

$$\left(\frac{1}{x-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x-\sqrt{x})^2} = \frac{\quad}{x^2-2\sqrt{x}+x}$$

$\forall x \geq 1 \quad 1-\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x-\sqrt{x})^2 > 0$

d'où $\forall x \geq 1$ $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ est strictement décroissante avec limite 0, d'où $\sum \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ est convergente.

16 $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

$$|u_n| = \frac{1}{n-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

$\frac{1}{2n} \leq$ mais $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, d'où $\sum |u_n|$ diverge.

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \quad \frac{n-(-1)^n\sqrt{n}}{n-(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n n-\sqrt{n}}{n^2-n} = \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}(n-1)}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{S_k}{k} - \frac{S_k}{k+1}$$

$$\frac{kS_k+S_k-kS_k}{k(k+1)} = \frac{S_k}{k(k+1)}$$