Exercice 2

1. Convergence $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

a) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}{(n+1)^n\,\cancel{(n+1)}} \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{-1} < 1$$

d'où la série $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

b) $u_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$

d'où la série diverge

c) $u_n = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$

$$e^{\ln\left(n^{\frac{1}{n}}\right)} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1 = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) - 1 = \frac{\ln(n)}{n}$$

$\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge $\left(\frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$

2.

(a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)\frac{(-1)^n 2^{2n}}{5^n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n = -\left(\frac{1}{1+z} - 1\right) = -\left(\frac{5}{9} - 1\right)$$
$$= -\left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

$\left(\frac{4}{5}\right)^n$ décrois vers 0 car une suite géométrique $z<1$
et donc la série alternée converge.

(B) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ $\qquad \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}$ d'où la série converge

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + B(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3

$[0,1]$

$f_n(x) = nx^n(1-x)$

1) $f_n(0) = 0 \qquad f_n(1) = 0$

$x \in \,]0,1[\quad 0 < 1-x < 1$

$x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $x \in \,]0,1[$

$f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc f_n converge simplement vers une fonction nulle

2) $f'_n(x) = (nx^n(1-x))' = nx^n - nx^{n+1}$

$$= n^2x^{n-1} - n(n+1)x^n$$

$$= x^{n-1}(n^2 - n^2x - nx)$$

$n(n - nx - x) = n(n - x(n+1)) \qquad \frac{n}{n+1}$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
x^{n-1}	0		$+$		
$n^2 - n^2x - nx$		$+$	0	$-$	
$f'_n(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Si on choisit $\frac{n}{n+1}$ a $\frac{1}{2}$ comme le plus petit valeur et pour chaque n $\frac{n}{n+1}$ est croissant

$\|f_n(x)\|_{[0,\frac{1}{2}]} = f_n\left(\frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où f_n converge uniformement sur $[0, \frac{1}{2}]$

On a trouvé que sur $[0,1]$ $x = \frac{n}{n+1}$ est le maximum d'une fonction, qui est toujours <1 donc le choix du N toujours dépend du x pour n'importe quel x on trouvera n tel que le maximum d'une fonction sera à droite.

Donc f_n ne converge pas uniformement sur $[0,1]$

4. $\int_0^1 0\,dx = 0$

$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 nx^n(1-x)dx = \int_0^1 (nx^n - nx^{n+1})dx$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $= \left[\frac{n}{n+1}x^{n+1} - \frac{n}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$

D'où $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ $= \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} = \frac{n^2+2n-n^2-n}{(n+1)(n+2)} =$

$= \frac{n}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 0$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{\frac{n+2}{n+2}-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

<u>Partiel 22</u>

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{3^n} 3 \cancel{n!} \cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \quad \frac{n^n}{\cancel{3^n} \cancel{n!}} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= 3e^{-1} \quad \frac{1}{2.7} > 1$$

D'où la série diverge.

Si on remplace 3 par e par le critère d'Alembert $ee^{-1} = 1$ d'où on peut rien dire

<u>Exercice 3</u>

$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

d'où $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$ sur $[0, +\infty[$