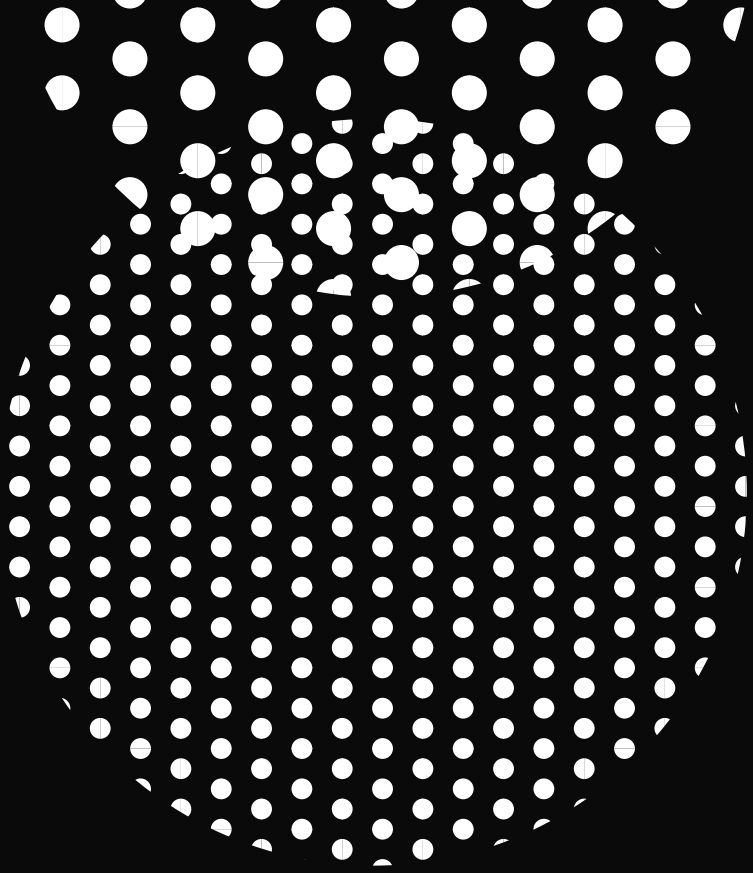

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^{3n}$$

$$\frac{(n+1)^n \cancel{n+1}}{\cancel{n!}(n+1)} x^{3n} x^3 \qquad \frac{n!}{x^{3n} n^n}$$

$$= x^{3n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 1$$

$$\Rightarrow x^3 < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow x^3 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$\Rightarrow x^3 < e^{-1}$$

$$\Rightarrow x < e^{-\frac{1}{3}}$$

$$R = e^{-\frac{1}{3}}$$

4) $\int_0^1 \int_0^1 t\, e^{x+t^2}\, dx\, dt$

$$= \int_0^1 t e^{t^2} dt \cdot \int_0^1 e^x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{t^2}\right]_0^1 \cdot \left[e^x\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} e - \frac{1}{2}\right] \cdot \left[e^1 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)(e-1)$$

$$= \frac{1}{2}(e-1)^2$$

<u>Exercice 2</u>

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

$$\left| \frac{x^n x}{(n+1)n} \frac{n(n-1)}{x^n} \right| = \left| x \frac{n-1}{n+1} \right| < 1$$

$$\Rightarrow x < \frac{n+1}{n-1} \longrightarrow 1$$

Donc $R = 1$

2) D'après le cours f cv. normalement sur $]-1,1[$

montrons que en -1 et 1 aussi.

$\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ cv. donc en -1 et 1 aussi.

Donc f est continue sur $[-1,1]$.

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = f'(x) = \ln(1+x)$

$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = f''(x)$

$f(x) - f(0) = \int_0^x \ln(1+t)\,dt = [t\ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$

$\ln(1+t) \quad t$

$\frac{1}{1+t} \quad 1$

$= x\ln(1+x) - [t - \ln(1+t)]_0^x$

$= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$

$f(0) = 0$

$\Rightarrow f(x) = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$

4) $f(1) = \ln(2) - 1 + \ln(2)$
$= 2\ln(2) - 1$

Exercice 3

$F(x) = \int_0^1 (1+t)^x dt \qquad f(x,t) = (1+t)^x = e^{x\ln(1+t)}$

$\ln(1+t)$ continue sur $0,1$

$e^{x\ln(1+t)}$ continue sur $\mathbb{R}$ donc F l'est aussi.

$\frac{d}{dx} e^{x\ln(1+t)} = \ln(1+t)\, e^{x\ln(1+t)}$ qui est aussi continue sur $\mathbb{R}$, donc F l'est aussi.

2) $F'(x) = \int_0^1 \ln(1+t)\, e^{x\ln(1+t)}\, dt$

3) $F'(x) = \int_0^1 \ln(1+t)\, e^{x\ln(1+t)}\, dt$

$F'(0) = \int_0^1 \ln(1+t)\, dt$

$= [(1+t)\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t}\, dt$

$= 2\ln 2 - 1$

$F(0) = \int_0^1 1\, dt = [t]_0^1 = 1$

$F(x) = 1 + (2\ln 2 - 1)x + o(x)$

Exercice 4.

$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

$y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots$

$= a_0$

$= 0$

$\Rightarrow a_0 = 0$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

$=$

$y'(0) = 1 = a_1 + 0$

$\Rightarrow a_1 = 1$

$x\, y'' = y$

$y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$x y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n = y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow n(n+1) a_{n+1} = a_n$

$n(n+1)\, a_{n+1} = a_n$

2) Init : $a_1 = \dfrac{1}{1\,(1)^2} = 1$ fait !

Hyp de rec :

$P(n)$: $a_n = \dfrac{1}{n\,((n-1)!)^2}$

$P(n+1)$: $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n(n+1)}$ par [1]

$$a_{n+1} = \frac{1}{n\,((n-1)!)^2\, n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)!\; n(n-1)!\,(n+1)} = \frac{1}{(n!)^2(n+1)}$$

Ce qui conclut l'hypothèse de récurrence.

Donc $y(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n((n-1)!)^2}\, x^n$

$$\left| \frac{1}{n+1\,(n!)^2}\, \cancel{x^n} x \;\; \frac{((n-1)!^2)\, n}{\cancel{x^n}} \right|$$

$$= x\, \frac{n}{(n+1)\, n^2} = x\, \frac{}{(n+1)n} < 1$$

$$\Rightarrow x < n(n+1) \longrightarrow +\infty$$

Donc $R = +\infty$.