1)

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{3^n}$

$$\frac{x^{n+2}}{3^n 3} \frac{3^n}{x^{n+1}} = \frac{1}{3}x < 1$$

$$\Rightarrow x < 3 \Rightarrow R = 3$$

b) $\frac{x^{n+1}}{3^n 3} \frac{3^n}{x^n} = \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow R = 3$

? c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$

$$\left(\frac{x^{n^2}}{2^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^n}{2} < 1 \Rightarrow x^n < 2$$

$$\Rightarrow x < 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow R = 1$$

d) $|\sin(n)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

d'où $\sin(n) x^n \leq x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

x^n cv ssi $x \in]-1, 1[\Rightarrow \underline{\underline{R = 1}}$

2) Soit $\sum a_n x^n$ et rayon de cv R.

$\sum a_n x_0^n$ cv $\Rightarrow R \geq |x_0|$

car $\sum a_n x^n$ cv si $x \in]-R, R[$ parfois en R ou $-R$

3) $R \leq x_0$

6) Soient $\sum a_n x^n$ de RCV R_a
$\sum b_n x^n$ de RCV R_b

Montrer que $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$

On suppose que $|a_n| \sim |b_n|$

$\Rightarrow$ $|a_n| = O(|b_n|) \Rightarrow \exists C_1 \quad |a_n| \leq C_1 |b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$|b_n| = O(|a_n|) \Rightarrow \exists C_2 \quad |b_n| \leq C_2 |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum |a_n||x^n| \leq C_1 \sum |b_n||x^n|$ mais $\sum |b_n||x^n|$ cv

donc $\sum |a_n||x^n|$ cv $\forall |x| < R_b$
et pour $|x| < R_a$ aussi

donc $R_a \geq R_b$

À l'inverse $\sum |b_n||x^n| \leq C_2 \sum |a_n||x^n|$ et $\sum |a_n||x^n|$ cv.
donc $\sum |b_n||x^n|$ cv pour $\forall |x| < R_a$
et pour $\forall |x| < R_b$ aussi

donc $R_a \leq R_b$

$R_a \geq R_b$ et $R_b \leq R_a$ $\Rightarrow$ $\underline{R_a = R_b}$

4) $\sum a_n x^n$ de RCV R. $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Utilison règle de Cauchy :

$|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 = L$ car $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Mais $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$ mais $L < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{L} > 1$

d'où $\underline{R \geq 1}$

5) $\sum a_n x^n$ de RCV $\underline{R}$.

On suppose que $\sum (-1)^n a_n$ diverge

donc $\sum a_n$ diverge

Alors $\sum a_n |1|^n$ dv. donc $R \leq 1$

car $\sum a_n |x|^n$ dv $\forall |x| > R$

mais dans ce cas $\sum a_n x^n$ dv $\forall |x| \geq 1$

donc $\underline{\underline{R \leq 1}}$

7) a) $x \longmapsto \ln((2-x)(3-x))$

$$= \ln\left(2\cdot 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$= \ln(6) + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

$$= \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n}$$

$$= \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n n} \longrightarrow R = 3$$

$$\frac{x^n x}{2^n 2(n+1)} \quad \frac{2^n n}{x^n} = \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2}x \Rightarrow R = 2$$

$R = 2$

b) $x \to \int_0^1 t^2 \sin(tx)\,dt \quad = g(x)$

$$\sin(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(tx)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$g(x) = \int_0^1 t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(tx)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{2n+3}\,dt$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+4)} t^{2n+4}\right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+4)}$$

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!\,(2n+6)} \quad \frac{(2n+1)!\,(2n+4)}{x^{2n+1}} = x^2 \quad \frac{(2n+4)}{(2n+2)(2n+3)(2n+6)} \sim x^2 \frac{1}{n^2} < 1$$

$$x^2 < n^2$$

$R = +\infty$

c) $x \longmapsto \ln(1+x^2)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$\left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}} \cancel{x^{2n}} x^2 (-1)}{n+1} \quad \frac{n}{\cancel{x^{2n}} \cancel{(-1)^{n+1}}} \right| = x^2 \left(\frac{n}{n+1}\right) < 1$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{n+1}{n}$$

$$\Rightarrow x^2 < 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow x < 1$$

$R = 1$

8] Soit $u_n = \frac{1}{n}$

$\sum \frac{1}{n} x^n$

$$\frac{x^n x}{n+1} \quad \frac{n}{x^n} = x \frac{n}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow x < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow R = 1$

Mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge car série harmonique

Donc si $\sum u_n x_n$ de $R = 1 \not\Rightarrow \sum u_n$ cv.

9] Soit $u_n = \frac{1}{\ln n}$

$\sum u_n x^n = \sum \frac{1}{\ln n} x^n$

$$\frac{x^n x}{\ln n+1} \quad \frac{\ln n}{x^n} = x \frac{\ln n}{\ln n+1} < 1$$

$$\Rightarrow x < \frac{\ln n+1}{\ln n} \sim \frac{\ln n}{\ln n} = 1$$

$\Rightarrow R = 1$

Mais $\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n \ln n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln n} = \sum \frac{u_n}{n}$ diverge

car une série de Bertrand.

10)

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$\frac{(-1)^n}{n} u_n = ((-1)^2)^n \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{n \ln n}$ dont la somme diverge

11) Oui

$\sum u_n x^n \qquad R = 1$

$\Rightarrow \sum u_n z^n$ cv $\forall z < 1$

$\sum u_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ or $\frac{1}{2} < 1$ donc cv.

12)

$\sum n!\, x^n$

$$\frac{\cancel{n!}(n+1)\cancel{x^n}x}{\cancel{n!}\cancel{x^n}} = x(n+1) < 1$$

$$x < \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow R = 1$

$\sum \frac{1}{n!} x^n$

$$\frac{\cancel{x^n}x}{\cancel{n!}(n+1)} \; \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} = \frac{x}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow x < n+1 \longrightarrow +\infty$$

$R = +\infty$

13)

a) $\sum n(n-1)x^n$

$$\frac{(n+1)n x^n x}{n(n-1)x^n} = \frac{(n+1)}{n-1} x < 1$$

$$\Rightarrow x < \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$$

$R = 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n\, x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2-n)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n^2x^n - \sum_{n=2}^{\infty} nx^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2\left(\sum_{n=2}^{+\infty} x^n\right)'' \quad \text{série géométrique}$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)''$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)'$$

$$= x^2\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad \forall x \in]-1,1[$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{16}\right)^n - \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{16}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x^2}{16}} - \frac{x}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{16}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x^2}{16}}\left(1-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{1-\frac{x^2}{16}}\,\frac{4-x}{4}$$

$$= \frac{1}{\frac{16-x^2}{16}}\,\frac{4-x}{4} = \frac{16}{16-x^2}\,\frac{4-x}{4}$$

$$= \frac{4}{(4-x)(4+x)}\,4-x$$

$$= \frac{4}{4+x} =$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n - 1 \, dt$$
$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t} - 1 \, dt$$
$$= \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x\right)$$
$$= -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x e^x$$

$$\frac{x^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} = \frac{x}{n} < 1$$
$$x < n \longrightarrow +\infty$$
$$R = +\infty$$

14)

$f_1(x,y) = \sqrt{1+xy}$

est continue lorsque $1+xy \geq 0 \Rightarrow xy \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{y}$

$\Rightarrow y \geq -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x \geq -1 \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \vee \quad y \geq -1 \quad 0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow x < 0 \quad y < 0 \quad \vee \quad x > 0 \quad y > 0$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{1+xy}}$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{1+xy}}$$

$f_2(x,y) = e^{x+y} \sin(x-y)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = e^{x+y} \sin(x-y) + e^{x+y} \cos(x-y) = e^{x+y}(\sin(x-y) + \cos(x-y))$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = e^{x+y} \sin(x-y) - e^{x+y} \cos(x-y) = e^{x+y}(\sin(x-y) - \cos(x-y))$$

$f_3(x,y) = \sin(1-x^2-y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = -2x\cos(1-x^2-y^2)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = -2y\cos(1-x^2-y^2)$$

15) $f_1(x,y) = x\tan y$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \tan y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x\frac{1}{\cos^2(y)}$$

$f_2(x,y) = \arctan(x+xy)$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = (1+y)\frac{1}{1+(x+xy)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = x\frac{1}{1+(x+xy)^2}$$

$f_3(x,y) = 1-x+9y+xy+x^2+y^2$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = -1+y+2x$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 9+x+2y$$

16)

a) $f_1(x,t) = \dfrac{x(x-t^2)+t^2}{x^2+t^2}$

$$f_1\left(\frac{1}{n},0\right) = \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$f_1\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}+1\right)}{\frac{2}{n^2}} = \frac{2-\frac{1}{n}}{2}$$

$$= 1-\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc lorsque x,y tendent vers 0, $f_1(x,y)$ tend vers 1

Posons $x = t = y$ et faisons y tendre vers 0

Calculer $f_1(y,y) = \dfrac{y(y-y^2)+y^2}{y^2+y^2} = \dfrac{2y^2-y^3}{2y^2} = 1 - \frac{1}{2}y$

où y tend vers 0

Donc $f_1(y,y) \xrightarrow[y\to 0]{} 1 = f_1(0,0)$

Donc f_1 est continue

Q) $f_2(x,t) = \dfrac{xt^3}{x^4+t^4}$ si $(x,t) \neq 0$ et 0 si $(x,t)=0$

Soit $x = t = y$ et faisons y tendre vers 0

$$f_2(y,y) = \frac{yy^3}{y^4+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Donc f_2 n'est pas continue en $(0,0)$