2

Exo 1

$\sum (u_n+v_n)$ cv

On pose $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$

Donc $\sum (u_n+v_n) = (1-1) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}) + \dots$

$= 0 + 0 + 0 + \dots = 0$ converge vers 0

par contre $\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge car $\alpha = 1$

Exo 2

$\lim\limits_{n \to n} u_n = 0$

On pose $u_n = \frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n \to n} u_n = 0$

par contre $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Exo 3

$\sum u_n$ converge absolument
i.e $v_n = |u_n|$

$\sum v_n$ converge
Etudions la convergence absolue
$\sum (1 + \frac{1}{n}) v_n = \sum v_n + \sum \frac{1}{n} v_n$

Or $\sum v_n$ converge, donc $\sum \frac{1}{n} v_n$ converge aussi
car $\forall n \geq 1 \ \frac{1}{n} v_n \leq v_n$

Exo 4

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}}$

$v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}}$

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent car les séries alternées où $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \longrightarrow 0$ et $\frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ et les deux décroissantes

Par contre $\sum u_n v_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}} = \sum \frac{(-1)^{2n}}{n^{\frac{5}{6}}}$

$= \sum \frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}$

diverge car $\frac{5}{6} = \alpha < 1$

Exo 5

On écrit $\sum (-1)^n u_n$

On vérifie sa convergence absolu

$\sum |(-1)^n u_n|$

$|(-1)^n u_n| = |u_n|$ si n pair

$|(-1)^n u_n| = \underbrace{|(-1)^n| u_n}_{= u_n = |u_n|}$ si n impair et $u_n \geq 0$

$|(-1)^n u_n| = |u_n|$ si n impair et $u_n < 0$

Dans tous les cas

$\sum |(-1)^n u_n| = \sum |u_n|$ mais $\sum |u_n|$ est convergente par hypothèse, donc $\sum (-1)^n u_n$ converge absolument. donc converge

Exo 6

On provient contre exemple:

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ d'où $\sum u_n$ converge
ce qui est demandé par hypothèse

$\sum (-1)^n u_n = \sum (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum (-1)^{2n} \cdot \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n}$ diverge.

Donc si $\sum u_n$ converge, $\sum (-1)^n u_n$ ne converge pas nécessairement.

Exo 7

a) $\sum_{n}^{+\infty} \cos n$

$\forall n \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1$
mais n'admet pas de limite
donc $\cos(n) \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$
donc $\sum \cos(n)$ diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n \cos(\frac{1}{n}))$

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow \cos(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$0 \leq 1 + (-1)^n \cos(\frac{1}{n}) \leq 2$ pour n assez grand

mais n'admet pas de limite, donc diverge.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ où $v_n = \sin(n) + \cos(n)$

D'après a) $\sum^{n} \cos(n)$ diverge
En procédant de même $\sum^{n} \sin(n)$ diverge car $\sin(n)$ n'admet pas de limite
Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ diverge car somme des séries divergentes

d)

$$\sum \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \sum u_n$$

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{2n}{2n(1+\frac{1}{2n})}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)^{-1} \approx e^{-\frac{1}{2}}$$

pour n assez grand.

Or terme de la série ne tend pas vers 0
donc la série est divergente.

<u>Exo 8</u>

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \simeq e^{-1} \neq 0$$

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$
donc $\sum u_n$ diverge

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge car une série harmonique

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par comparaison

$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum \frac{1}{n}$ diverge par b)

donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge aussi

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad \forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$

donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge par comparaison

e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge car une série de Bertrand
avec $\alpha = 1$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} \qquad \frac{\ln(n)}{n^2} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1} = \ln(n)\, n^{\frac{3}{2}-2} = \ln(n)\, n^{-\frac{1}{2}} = \frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall n \geq 1 \quad \frac{\ln(n)}{n} < 1 \implies \forall n \geq 1 \quad \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge car série de Raimann avec $\alpha > 1$
Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge par comparaison

Exo 9

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3} = S$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3}$

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} k^{-3} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-3} \right| = |R_n| \leq (n+1)^{-3}$$

$(10)^{-4} = 0.0001$

$$(k+1)^{-3} < 0.0002$$
$$\Leftrightarrow \frac{20000}{(k+1)^3} < 1$$
$$\Leftrightarrow 20000 < (k+1)^3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{20000} < k+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{20000} - 1 < k$$
$$\Leftrightarrow k > 26,15$$

On doit calculer la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} n^{-3}$ avec l'erreur inférieur à 0,0002, l'erreur est :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^{-3} \approx \int_N^{+\infty} x^{-3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_N^{+\infty} = \left[\frac{x^{-2}}{2}\right]_{+\infty}^{N} = \frac{N^{-2}}{2} = \frac{1}{2N^2}$$

Maintenant calculons $\frac{1}{2N^2} \leq 0,0002$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2N^2} \leq 0,0002$$
$$\Leftrightarrow N^2 \geq \frac{1}{0.0004} = \frac{1}{10^{-4}\cdot 4} = \frac{10^4}{4} = \frac{10000}{4} = 2500$$
$$\Leftrightarrow N^2 \geq 2500$$
$$\Leftrightarrow N \geq 50$$

Donc il faut prendre au moins 50 termes pour calculer $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ à 0,0002 près.

Exo 10. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et décroît

les deux critères de série alternée sont satisfaites donc $\sum u_n$ converge.

$\sum |u_n| = \sum \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car

une série de Reimann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

donc $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais ne converge pas absolument.

Exo 11

$$\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) = \sum \left((-1)^n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= \sum \left((-1)^n \left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right)$$

$\frac{1}{n^2+n}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$

Donc les deux critère d'une série alternée sont satisfaite donc la série converge.

$\sum \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right| = \sum \left|(-1)^n\left(\frac{1}{n^2+n}\right)\right| = \sum \frac{1}{n^2+n}$ converge car $\forall n \geq 1$ $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par comparaison.

Donc $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$ converge simplemet et absolument.

12. $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \sum (-1)^n \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$

$\forall n \geq 2$ $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ $\qquad \frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$, $\quad \frac{1}{n-\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \approx \sum (-1)^n \frac{1}{n}$ qui converge car série alternées où $\frac{1}{n}$ décroît vers 0 mais ne converge pas absolument car $\sum |(-1)^n| \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n}$ série harmonique

Exercice 13

a) $\sum \frac{2^n n!}{n^n} = \sum u_n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{n!} \cancel{(n+1)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \frac{n^n}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{n!}} = \frac{2n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= 2e^{-1} < 1$$

Donc la série converge.

b) $\sum n \frac{2^n}{3^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)2^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n 2^n} = \frac{(n+1)2}{3n} = \frac{2n+2}{3n}$$

$$= \frac{\cancel{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n} \cdot 3}$$

$$= \frac{2+\frac{2}{n}}{3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{3}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

donc la serie converge

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5+n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(5+n+1)}{\cancel{n!}(n+1)} \frac{\cancel{n!}}{(5+n)} = \frac{6+n}{5n+5+n^2+n} = \frac{n+6}{n^2+6n+5}$$

$$= \frac{\cancel{n}(1+\frac{6}{n})}{\cancel{n}(n+6+\frac{5}{n})} \approx \frac{1+\frac{6}{n}}{n+6} \approx \frac{1}{n+6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc converge.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{(1+\sqrt[n]{n})^n}{3^n}$

On utilise le critère de Cauchy

$$\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{1+\sqrt[n]{n}}{3} \longrightarrow \frac{2}{3} \quad \text{car } \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Or $\alpha_n \approx \frac{2}{3} < 1$ donc la suite converge

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{\ln(n+1)}}{(\ln(n+1))^{n+1}} \frac{\ln(n)^n}{n^{\ln n}} = \frac{\cancel{n^{\ln n}}\cdot e \,\cancel{(\ln n)^n}}{\cancel{(\ln n)^n}\ln n \;\cancel{n^{\ln n}}} = \frac{e}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\ln(n+1) \sim \ln(n) + \frac{1}{n}$

$(n+1)^{\ln(n+1)}$

$$(n+1)^{\ln(n+1)} = (n+1)^{\ln n + \frac{1}{n}} = (n+1)^{\ln n} \cdot (n+1)^{\frac{1}{n}}$$
$$= (n(1+\tfrac{1}{n}))^{\ln n} \cdot (n(1+\tfrac{1}{n}))^{\frac{1}{n}}$$
$$= n^{\ln n} \cdot (1+\tfrac{1}{n})^{\ln n} \cdot n^{\frac{1}{n}} \cdot (1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$$
$$= n^{\ln n} \cdot (1+\tfrac{1}{n})^{\ln n + \frac{1}{n}}$$
$$= n^{\ln n} \cdot \underbrace{(1+\tfrac{1}{n})^{\ln n}}_{e} \cdot \underbrace{(1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}_{1}$$
$$\approx n^{\ln n} \cdot e$$

$$(\ln(n+1))^{n+1} \approx (\ln n)^{n+1} = (\ln n)^n \cdot \ln n$$

Donc la suite converge.

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

$\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n = (1+\frac{1}{n})^n (1+\frac{2}{n})^{-n} \approx e \cdot e^{-2} = e^{-1} < 1$

Donc la suite converge.

Exo 54

$f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$

On fix $x \in [0, +\infty[$

Donc calculons une limite d'une suite $u_n = (1+\frac{x}{n})^n$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = e^x$

Donc f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction $f(x) = e^x$

$(1+\frac{x}{n})^n$

$\Leftrightarrow \ln((1+\frac{x}{n})^n) = n \ln(1+\frac{x}{n})$

$\ln(1+\frac{x}{n}) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{x^2}{n^2})$

$n \ln(1+\frac{x}{n}) = n(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}) = x - \frac{x^2}{2n}$

$(1+\frac{x}{n})^n = e^{x - \frac{x^2}{2n}} = e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}}$

$|f_n - e^x| = e^x |e^{-\frac{x^2}{2n}} - 1| = e^x |1 - \frac{x^2}{n} - 1| = e^x |-\frac{x^2}{n}| = e^x \cdot \frac{x^2}{n}$

$e^{-\frac{x^2}{n}} \approx 1 - \frac{x^2}{n} + o(\frac{x^2}{n})$

Analysons $e^x \cdot \frac{x^2}{n}$

e^x est croissante sur $[0,1]$
$\frac{x^2}{n}$ l'est aussi. Donc $e^1 \cdot \frac{1^2}{n} = \frac{e}{n}$ est maximum de $|f_n - e^x|$ sur $[0,1]$
Donc $\|f_n(x) - e^x\|_{[0,1]} = \frac{e}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Donc f_n converge uniformément vers e^x sur $[0,1]$

Exo 15

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x^n}{1 + n x^{2n}} = \frac{\sqrt{n}\, x^n}{\frac{1}{n} + x^{2n}} \approx \frac{\sqrt{n}\, x^n}{x^{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{x^n} \longrightarrow$$

On fixe $x \in [0, +\infty[$

Si $x = 0$ donc $f_n(0) = \frac{n^{\frac{3}{2}} \cdot 0}{1 + n \cdot 0} = \frac{0}{1} = 0$

Si $0 < x < 1$

alors $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad n^{\frac{3}{2}} x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

et $n x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $f_n(x) \approx \frac{0}{1+0} = 0$ sur $]0, 1[$ qd $n \to +\infty$

Si $x = 1$ $\quad f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{1+n} \underset{n \to +\infty}{\approx} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Si $x > 1$ $\quad f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x^n}{1 + n x^{2n}} = \frac{n^{\frac{3}{2}} x^{-n}}{\frac{1}{x^{2n}} + n} \approx \frac{n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x^n}}{n} = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{x^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Alors $f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, +\infty[\setminus \{1\} \\ +\infty & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Donc f_n diverge en $x = 1$

donc ne converge pas simplement sur $[0, +\infty[$

Donc ne converge pas uniformement aussi.

Exo 16

Soit $f_n(x) = n \cdot x^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$

a) Soit $x = 0$ alors $f_n(0) = n \cdot 0^n (1 - 0)$

$= n \cdot 0 \cdot 1 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $x = 1$ alors $f_n(1) = n \cdot 1^n (1 - 1) = n \cdot 1 \cdot 0 = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $x \in]0, 1[$ alors $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad n x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\quad 0 < 1 - x < 1$

Donc $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ sur $]0, 1[$

Donc $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) = 0$ sur $[0, 1]$

b) Soit $n \geq 1$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \in [0,1]}} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} n x^n (1-x) = n x_0^n (1-x_0) = f_n(x_0)$$

Donc f_n est continue sur $[0,1]$

$n(1-x)\,x^n$
$= (n - nx)x^n$

Calculons $f_n'(x) = n^2 x^{n-1}(1-x) + n x^n (-1)$
$= n^2 x^{n-1}(1-x) - n x^n$

$= -nx^n + n(1-x)nx^{n-1}$
$= nx^{n-1}(n - nx - nx)$
$= nx^{n-1}(n - 2nx)$
$= n^2 x^{n-1}(1-2x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$1-2x$		$+$	0	$-$	
$n^2 x^{n-1}$	0		$+$		
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{n}{2^{n+1}}$	$\searrow$	0

$f_n(\frac{1}{2}) = n \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{n}{2^{n+1}}$

c) Montrons que f_n conv. unif. sur $[0, \frac{1}{2}]$

D'après b) f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc
$f_n(\frac{1}{2})$ est le maximum locale de f_n sur $[0, \frac{1}{2}]$
$f_n(\frac{1}{2}) = \frac{n}{2^{n+1}}$ $\quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ $f_n(x) \leq \frac{n}{2^{n+1}}$

$|f_n(x)| \leq \frac{n}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc f_n converge uniformément vers $f(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$

le minimum de f_n est 0 sur $[0,1]$ est le maximum est $\frac{n}{2^{n+1}}$ d'après (b)
Donc $\forall x \in [0,1]$ $|f_n(x)| \leq \frac{n}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc f_n converge uniformément vers $f(x) = 0$ sur $[0,1]$

Exo 17

$u_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$
Soit $n \geq 1$ et on fixe $x \in \mathbb{R}$

alors $u_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ $\qquad \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
alors $\sin\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $u_n \longrightarrow u(x) = 0$ simplement

Maintenant on va vérifier la convergence uniforme

$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ on va approximer sin :

$\sin\left(\frac{x}{n}\right) \approx \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)$

$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|_{\mathbb{R}} = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{x}{n}$ donc la norme est dépendante de x
donc u_n ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$
par contre soit $0 < a < b \in \mathbb{R}$ et l'intervalle $I = [a, b]$

$\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|_I \approx \left|\frac{x}{n}\right|_I \leq \frac{b}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc u_n conv. unif. sur I

Soit $a < 0 < b$ et $I = [a, b]$
alors $\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \approx \left|\frac{x}{n}\right|_I \leq \frac{0}{n} = 0$ donc ______

Soit $a < b < 0$ et $I = [a, b]$
donc $\left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right| \approx \left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{|a|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc ______

Donc u_n converge uniformément sur tout segment mais pas sur $\mathbb{R}$.