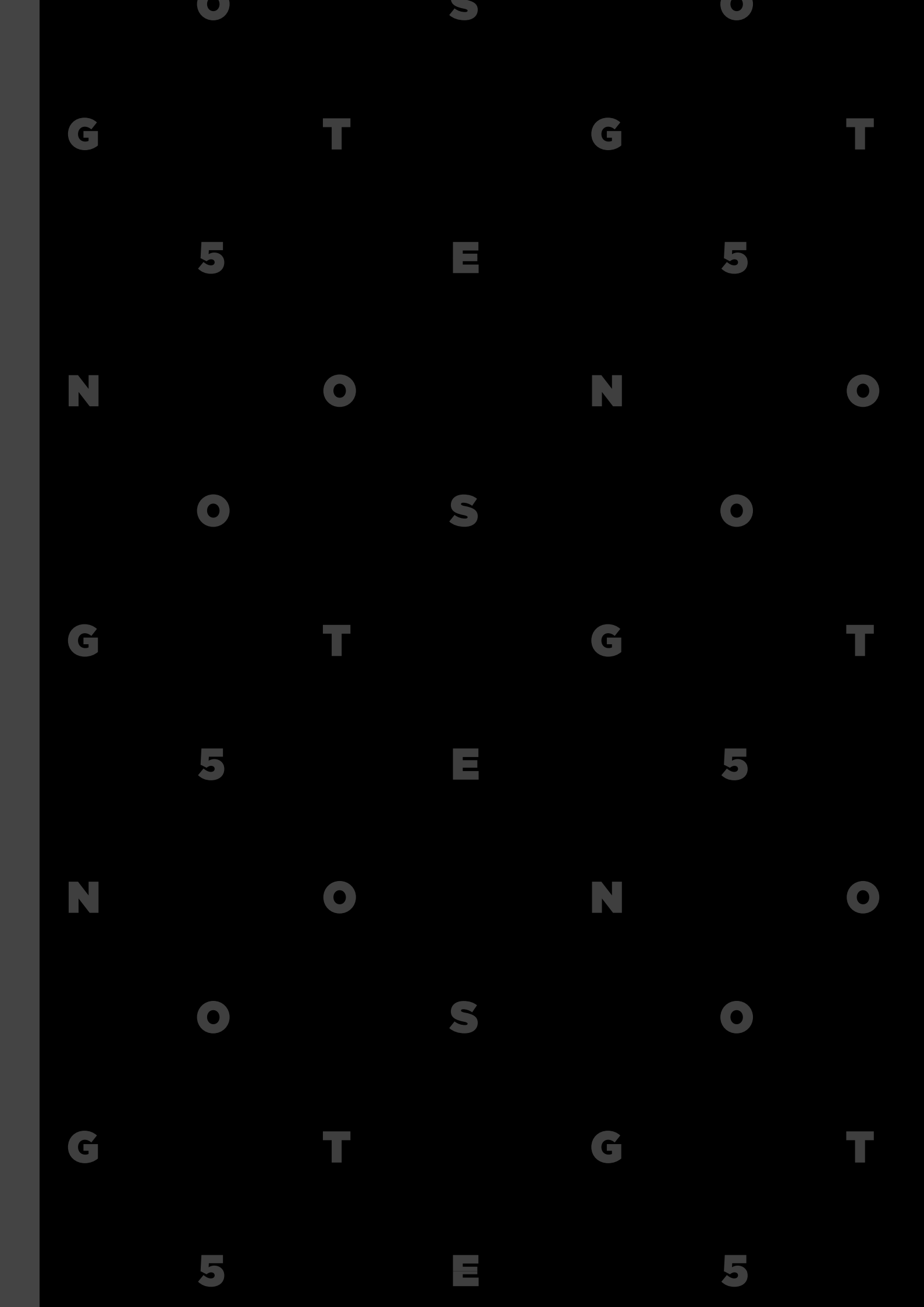




Déf: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonctions, et I un intervalle

f_n converge uniformément vers une fonction f sur I
si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

Notation: Soit f_n une fonction bornée. On note la $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$
c'est la norme uniforme de f sur I

Déf: La suite de fonctions f_n converge uniforme vers f
sur un intervalle I si $\|f_n - f\|_I \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Thm: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des fonction continue qui
converge uniformément vers f sur I .
Alors f est continue.

pr: Soit $x \in I$.

$$\|f_n - f\|_I \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in I$$

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Or f_n continue alors $\exists \delta > 0, |x - a| < \delta, |f_n(x) - f_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$
et $|f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(a)) + (f_N(a) - f(a))| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui conclut que f est continue.

Def: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction, I un intervalle
 f_n converge uniformement vers f sur I
si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in I |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Notation: Soit f une fonction bornée sur I
 $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est la norme uniforme de f sur I .

Def: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions
 f_n converge uniformement vers f sur I
si $\|f_n - f\|_I \longrightarrow 0$

Thm: Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des fonction continue sur I
et f_n converge uniformement vers f sur I .
Alors f est continue sur I .

P.V.: Or f_n conv. unif. vers f sur I . Il faut mg $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
Soit $\varepsilon > 0$

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in I |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\underline{|f(x) - f(a)| < \varepsilon}$$