



Exercice 1

1) prenons $(x, t) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Donc f n'est pas continue.

2) x^3 est continue sur $\mathbb{R}^2$
 $x^3 + t^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

Donc il nous reste à étudier la continuité en $(0,0)$

Soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |x - x_0| = |\sqrt{x^2 + t^2}| < \delta &\Rightarrow |x^2 + t^2| < \delta^2 \\ &\Rightarrow |x^2| < \delta^2 \\ &\Rightarrow |x| < \delta \end{aligned}$$

$$f_1(x, t) = x \frac{x^2}{x^2 + t^2} \leq |x|$$

Si on prend $\delta = \varepsilon$ On trouve que $f_1(x, t) \leq |x| < \varepsilon = \delta$

3) Prenons $(x, t) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$

$$(x, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$$

$$f_3\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} + 0} = 1 \neq 0$$

Donc f_3 n'est pas continue.

$$4) \quad f_4(x, t) = \sin(x^2 + t^2) \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}$$

Soit $\varepsilon > 0$

Supposons que $|x - (0, 0)| = |\sqrt{x^2 + t^2}| < \delta$

$$\begin{aligned} f_4(x, t) &= \sin(x^2 + t^2) \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \quad \forall q \in \mathbb{R}^+ \quad \sin(q) \leq q \\ &= \frac{x^2 + t^2}{\sqrt{x^2 + t^2}} = \sqrt{x^2 + t^2} < \delta \end{aligned}$$

Si on prend $\delta = \varepsilon$ on obtient

$$|f_4(x, t) - f(0, 0)| = |f_4(x, t)| < \varepsilon$$

D'où f_4 est continue.

Exercice 2

$$1. \quad f_1(x, t) = x^2 + t^2 - 2x + 4t$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 2t + 4$$

$$2) \quad f_2(x, t) = \frac{x-t}{x+t}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x+t - (x-t)}{(x+t)^2} = \frac{2t}{(x+t)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{-(x+t) - (x-t)}{(x+t)^2} = \frac{-2x}{(x+t)^2}$$

$$3) \quad f_3(x, t) = \sqrt{1 + x^2 t^2}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 2xt^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2 t^2}} \right) = -\frac{xt^2}{\sqrt{1+x^2 t^2}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} = 2x^2 t \left(-\frac{1}{2\sqrt{1+x^2 t^2}} \right) = -\frac{x^2 t}{\sqrt{1+x^2 t^2}}$$

$$4] f_7(x, t) = \ln(x + \sqrt{x^2 + t^2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (x + \sqrt{x^2 + t^2})' \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + t^2}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + t^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{t}{\sqrt{x^2 + t^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + t^2}}$$

$$5] f_8(x, t) = \frac{x \sin(t)}{1 + x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin(t)(1 + x^2) - 2x^3 \sin t}{(1 + x^2)^2} = \frac{\sin(t)(1 + x^2 - 2x^3)}{(1 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{x \cos(t)}{1 + x^2}$$

Exercice 3

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

1) $t \in [0, 1]$ D'où $x \neq 0$ e^{-t} et t sont C^0 sur $[0, 1]$
et x C^0 sur $]0, +\infty[$

Donc $\frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $]0, +\infty[\times [0, 1] = \mathcal{Q}$

Ce qui implique la continuité de $F(x)$

2) On a montré que $f(x, t)$ est continue

montrons que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-t} \frac{1}{(x+t)^2} \quad \text{est encore continue sur } \mathcal{Q}$$

donc F est dérivable et $F'(x) = -\int_0^1 e^{-t} \frac{1}{(x+t)^2} dt$

$\forall x \in]0, +\infty[$ $F'(x)$ est négative donc F est décroissante.

$$3) \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x} dt$$

$$e^{-1} \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt$$

$$\frac{e^{-1}(\ln(x+1) - \ln(x))}{x \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty} \leq F(x) \leq \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x \rightarrow 0^+ \rightarrow +\infty}$$

D'où par le thm des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+1} dt \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x} dt$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{\frac{1}{x+1} \int_0^1 e^{-t} dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-t} dt} \quad \frac{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0}{x \rightarrow +\infty \rightarrow 0}$$

D'où par le thm des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

4) D'après 3

$$\left(\frac{1}{x+1} \int_0^1 e^{-t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-t} dt \right) \cdot x$$

$$\frac{x}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \frac{x}{x+1} [-e^{-t}]_0^1 \leq x F(x) \leq \frac{x}{x} [-e^{-t}]_0^1$$

$$-e^{-1} + 1 \leq x F(x) \leq -e^{-1} + 1$$

D'où par le thm des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) = 1 - e^{-1}$$

$$\begin{aligned} \boxed{5} \quad \int_0^1 \frac{1-t}{x+t} dt &\leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt \\ &\leq F(x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1-t}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt$$

$$\frac{1}{x+1} - 1 \leq \frac{1-t}{x+t} = \frac{1}{x+t} - \frac{t}{x+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t} - 1 dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt$$

$$[\ln(x+t) - 1]_0^1$$

$$\begin{aligned} &[\ln(x+1) - 1] - [\ln(x) - 1] \\ &= \ln(x+1) - \ln(x) \leq F(x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) \end{aligned}$$

$$\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

$$\therefore -\ln(x) \leq F(x) \leq -\ln(x)$$

D'où par le théorème des gendarmes

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

Exercise 4

$$\underline{1]} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

$$\frac{d}{dx} e^{-t^2} = 0$$

$$f'(x) = \int_0^x 0 dt = 0$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2}$$

$$g'(x) = \int_0^1 \frac{-2x(1+t^2)}{1+t^2} e^{-(1+t^2)x^2} dt$$

$$= \int_0^1 -2x e^{-(1+t^2)x^2} dt$$

$$= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt$$

$$= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt$$

$$u = tx \Rightarrow t = \frac{u}{x}$$

$$dt = \frac{du}{x} = \frac{1}{x} du$$

$$= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} dv$$

$$h = g + f^2$$

$$h' = g' + f' 2f$$

$$= -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-v^2} dv + e^{-x^2} \cdot 2 \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt (-1 + 1) = 0$$

Ce qui signifie que h est constante.

21

Exercice 3

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

$$t \in [0, 1]$$

e^{-t} continue sur $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$

$x+t$ continue sur $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ mais s'annule
lorsque $x=0$ et $t=0$, donc

$\frac{e^{-t}}{x+t}$ continue sur $]0, +\infty[$

2] Si $\frac{df}{dx}$ est continue alors F est dérivable

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-t}}{x+t} &= \left(e^{-t} \frac{1}{x+t} \right)' = e^{-t} \left((x+t)^{-1} \right)' = \\ &= - \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \text{ qui est encore continue} \end{aligned}$$

Donc F est dérivable et

$$F'(x) = \int_0^1 - \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = - \int_0^1 \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

e^{-t} est positive sur $\mathbb{R}$, idem $(x+t)^2 \Rightarrow \int_0^1 \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$
est à valeur positive sur $x \in]0, +\infty[$

donc $F'(x) < 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$

donc F est décroissante sur $\mathbb{R}$

$$3] \quad \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt$$

$$e^{-1} [\ln(x+t)]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq [\ln(x+t)]_0^1$$

$$\begin{aligned} e^{-1} (\ln(x+1) - \ln(x)) & \\ e^{-1} \left(\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right) &\leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \ln(x+1) - \ln(x) \\ e^{-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) &\leq \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

4]

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

$$\frac{1}{x+1} \int_0^1 e^{-t} dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$\frac{1}{x+1} [-e^{-t}]_0^1 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} [-e^{-t}]_0^1$$

$$\frac{1}{x+1} (-e^{-1} + 1) \leq F(x) \leq \frac{1}{x} (1 - e^{-1})$$

Deux côtés tendent vers $+\infty$
d'où $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$

5]

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x)$$

$$\frac{1}{x+1} \int_0^1 e^{-t} dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$1 + \frac{1}{x} \int_0^1 e^{-t} dt \leq x F(x) \leq \int_0^1 e^{-t} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) = (1 - e^{-1})$$

6.

$$\int_0^1 \frac{1-t}{x+t} dt \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt$$

$$\int_0^1 \frac{1-t}{x+t} dt \leq F(x) \leq \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{t}{x+t} dt$$

$$\ln(x+1) - \ln(x) \leq F(x) \leq \ln(x+1) - \ln(x)$$

$$\ln(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \Rightarrow -\ln(x) \leq F(x) \leq -\ln(x)$$

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$$

exercice 4

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

$$\underline{1]} \quad f'(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = e^{-x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} = \frac{-(1+t^2)2xe^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} = -2xe^{-(1+t^2)x^2} \quad C^0$$

$$\text{donc } g \text{ est dérivable et } g'(x) = \int_0^1 -2xe^{-(1+t^2)x^2} dt$$

$$\begin{aligned} &= -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2} e^{-t^2 x^2} dt \\ &= -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt \end{aligned}$$