Intégrale à paramètre

Soit $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $Q = I \times [a, b]$

On note $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$

continuité Si f est continue sur Q ($f(x,t)$ continuité de x)
alors F est continue.

dérivabilité Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur Q
alors F dérivable et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Le cas généralisé

Rappel:

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ cv. si $F(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ a une limite finie.
$= \ell$ (on pose)

principe de comparaison

Soit $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

tq $\forall \alpha \in [a, +\infty[\quad f(\alpha) \leq g(\alpha)$

et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ cv. alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ cv.

Convergence absolue

Si $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ cv. (absolument) alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ cv.

Deux variables :

Soit $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $Q = I \times [a, +\infty[$

On va étudier $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ sur I

Continuité

Si f continue et dominé i.e $\exists\, g(t)$ tq

$\forall (x,t) \in Q \quad |f(x,t)| \leq g(t)$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ cv.

donc F est continue.

dérivabilité

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, continue sur Q et est dominée

i.e. $\exists\, K : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue t.q $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq K(t) \quad \forall (x,t) \in Q$

et $\int_a^{+\infty} K(t)\,dt$ cv, donc F est dérivable sur I

et $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$