Exercice 6

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$$

$$f = \sum_{n\geq 1} f_n$$

1. $$|L| = \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}(-1)}{(n+1)(2n+3)} \quad \frac{n(2n+1)}{\cancel{(-1)^{n+1}}} \right| = \left| (-1) \frac{2n^2+n}{2n^2+3n+2n+3} \right| = \frac{2n^2+n}{2n^2+5n+3}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+5+\frac{3}{n}} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n}} \longrightarrow 1 \Rightarrow R = 1$$

La série converge sur $]-1,1[$

La série converge absolument aussi en $x = 1, -1$
D'où la série converge sur $[-1,1]$ et
f est définie sur $[-1,1]$

2. Rappelons que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \qquad \int \frac{1}{1+x}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2x - 2x^3 + 2x^5 - 2x^7 \qquad \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^6}{6} \dots$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}$$

$$\ln(1+x^2)' = \frac{2x}{1+x^2} \qquad = \ln(1+x^2)$$

$$f'(x) = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}\right)' = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}\cancel{(2n+1)}}{n\cancel{(2n+1)}} x^{2n}$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1+x^2)$$

Or c'est une dérivée de la série entière, elle a
la même rayon de convergence.

3) $f'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1+x^2)$ $\qquad \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} = \frac{2n+1-2n}{n(2n+1)}$

$$f(x) = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1} = \sum (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right) x^{2n+1}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1} - 2\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= x \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} - 2\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= x \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} + 2\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= x \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} + 2\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n}}{2n+1} x^{2n+1} - 2x$$

$$= x \ln(1+x^2) + 2\arctan(x) - 2x$$

4) Montré dans 1) f C^0 en $[-1,1]$

5) On a déjà montré que la série converge en $x = 1$, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

Dans 3) on a trouvé que $f(x) = x\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) - 2x$

$$f(1) = 1\ln(2) + 2\arctan(2) - 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$

Exercice 7

$(x-2) \qquad - \qquad x+1$

a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x-2)} =$

$-\frac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-2}\right)$

$= -\frac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)$

pour $R=1$ $x \in]-1,1[$ $\quad = -\frac{1}{3}\left(\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n \geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$

$= -\frac{1}{3}\sum (-1)^n x^n - \frac{1}{6}\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$

$= -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\left[(-1)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n\right)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-7)^3} = (x-7)^{-3} = (-1)(7-x)^{-3}$

$= (-1)\,7^{-3}\left(1-\frac{x}{7}\right)^{-3}$

$t = -\frac{x}{7}$

$= (-7)^{-3}(1+t)^{-3}$

$= (-7)^{-3}\sum_{n\geq 1} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{7}\right)^n$

not good

Be smarter pls

$\dfrac{1}{1-x} = \sum x^n$

$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum n x^{n-1}$

$\left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)' = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum n(n-1)x^{n-2}$

$-\dfrac{1}{7^3}\dfrac{1}{(1-\frac{x}{7})^3} = -\dfrac{1}{2\cdot 7^3}\sum_{n\geq 0} n(n-1)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-2}$ pour $\left|\frac{x}{7}\right| < 1$

$\Leftrightarrow x \in]-7,7[$

Exercice 9

$$(E) \quad xy'' + 2y' + xy = 0$$
$$y(0) = 1$$

On suppose $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

1) $y(0) = \sum a_n 0^n = 1$
$= a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\sum a_n x^n\right)'' + 2\left(\sum a_n x^n\right)' + x\left(\sum a_n x^n\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x\sum n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum n a_n x^{n-1} + x\sum a_n x^n = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum 2n a_n x^{n-1} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum (n(n-1)a_n + 2n a_n)x^{n-1} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum n a_n (n-1+2) x^{n-1} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} n a_n (n+1) x^{n-1} + \sum_{n=1} a_{n-1} x^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0} (n+1)(n+2) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1} a_{n-1} x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + \sum_{n \geq 1} \left((n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n = 0$$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 0 & \Rightarrow a_1 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

car une série entière est nulle sur $]-R, R[$ ssi les coeff. sont tous nuls

2) $(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$

$$(2k+1)(2k+2)a_{2k+1} + a_{2k-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2k+2)}$$ mais $a_1 = 0$, donc $\forall k\ a_{2k+1} = 0$

$$\Rightarrow a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{(2k)(2k+1)}$$ mais $a_{2k-2} = -\frac{a_{2k-4}}{(2k-2)(2k-1)}$ on continue jusqu'au $2k-4 = 0$ où $a_0 = 1$

Démontrons par récurrence que $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$

<u>Initialisation:</u>

<u>$k=0$:</u> $a_0 = \frac{(-1)^0}{(0+1)!} = \frac{1}{1} = 1$

et dans (a) on a trouvé que $a_0 = 1$
donc l'init passe

<u>Hérédité:</u> $P(n) \cdot a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$P(n+1): a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

$a_{2n+2} = -\frac{a_{2n}}{(2n+2)(2n+3)} = (-1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}$

Vrai.

Donc on a montré par recurrence que $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$

$\frac{(-1)^n(-1)}{\cancel{(2n+1)!}(2n+2)(2n+3)} \quad \frac{\cancel{(2n+1)!}}{(-1)^n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \longrightarrow 0 \Rightarrow R = +\infty$

$y(x) = \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$