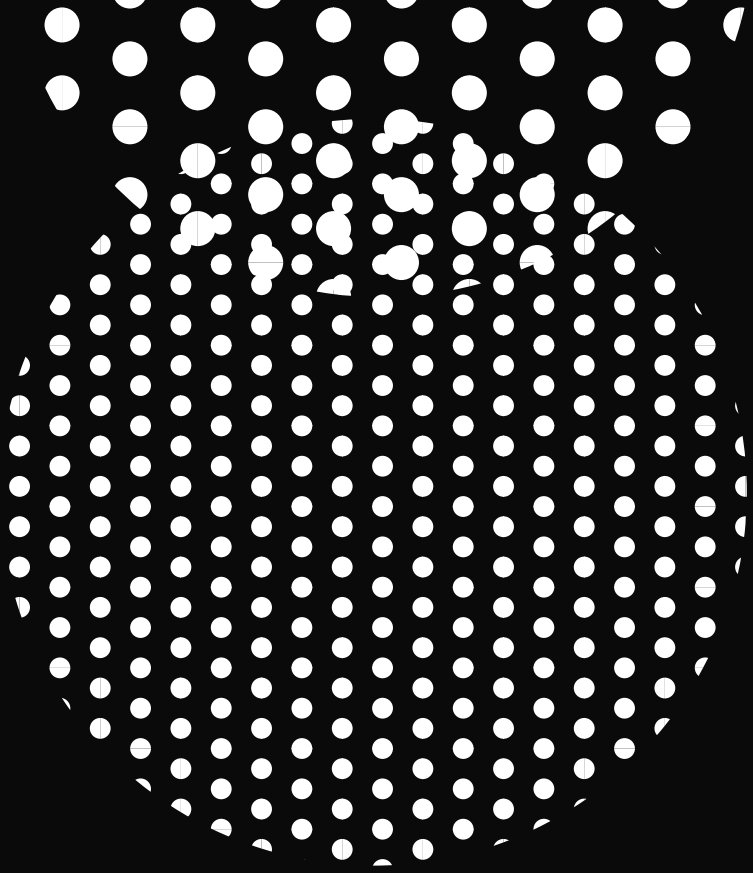

Def :

Séries de fonctions de la forme : a_n, suite numérique
$c \in \mathbb{R}$ constante

$$\sum a_n x^n \quad \text{ou} \quad \sum a_n (x-c)^n$$

est appelé Power series ou série entiers.

Déf rayon de convergence

$R = \sup \{ r : a_n r^n \text{ majorée} \}$

- La série converge normalement sur $]-R, R[$

Il faut vérifier sur $-R$ et R

- Si $\underbrace{x < -R \text{ ou } x > R}_{x \notin]-R, R[}$ la serie diverge

Règles

Soit une série $\sum a_n x^n = S(x)$

Cauchy

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow L$$

$$R = \frac{1}{L} \quad \left(L = 0 \Rightarrow \underline{R = +\infty} \ , \quad L = +\infty \Rightarrow \underline{R = 0} \right)$$

$\Downarrow$ Rayon de cv.

$\Downarrow$ $S(x)$ cv sur $]-R, R[$

$\Downarrow$ $S(x)$ converge sur tout $\mathbb{R}$

$\Downarrow$ $S(x)$ converge seulement sur 1 point

idem

Alembert

Si $\underline{a_n \neq 0}$ $\quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \longrightarrow L \Rightarrow R = \frac{1}{L}$

Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n x^n = S(x)$ de rayon R
i.e converge sur $]-R, R[$

(1) $S(x)$ continue sur $]-R, R[$

(2) $S(x)$ derivable sur R

$\hookrightarrow S'(x) = \sum (a_n x^n)'$

$= \sum n a_n x^{n-1}$ $\rightarrow$ aussi de rayon R $\Rightarrow$ (cv sur $]-R, R[$)

(3) $S(x)$ de classe $C^\infty(]-R, R[)$

(4) $S(x)$ cv. normalement sur $]-R, R[$ soit $[c, d] \subset]-R, R[$

donc

$$\int_c^d S(t)dt = \int_c^d \left(\sum a_n t^n\right) dt = \sum \int_c^d a_n t^n dt$$

$$= \sum a_n \int_c^d t^n dt = \sum a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_d^c = \sum a_n \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{n+1}$$

un peu plus de calculs pour comprendre mieux