



Exercice 1

a) $f_n(x) = x^n$ $n \rightarrow +\infty$
converge sur $] -1, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$
$$= \exp(n(\log(x) - \log(n^{\frac{1}{n}}))) = \exp(n(\log(x) - \frac{1}{n} \log(n)))$$
$$f_n(x) = \left(\frac{x}{n^{\frac{1}{n}}}\right)^n = \exp(n \log\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{n}}}\right)) = \exp(n \log(x) - \log n)$$

par croissance comparée il faut que $\log(x) < 0$ pour que $f_n(x)$ converge.
alors $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $] -1, 1]$

$x \in] -1, 1]$ par croissance comparée

c) $f_n(x) = n^x$
 $f_n(x)$ converge simplement sur $[-\infty, 0]$
vers $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

d) $f_n(x) = x^n e^n = (xe)^n$
converge si $-1 < xe \leq 1$
c'est $x \in] -\frac{1}{e}; \frac{1}{e}]$
vers $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} [\\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{e} \end{cases}$

e) $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$

$$0 \leq -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il vient alors que $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f) \quad f_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\text{si } x \neq 0 \quad f_n(x) = n \left(\frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + o\left(\frac{x^3}{n^3}\right) \right)$$

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{n^2} \cdot \frac{1}{6} + o\left(\frac{x^3}{n^2}\right)$$

$$\text{d'où} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

$$\text{si } x = 0 \quad f_n(0) = 0$$

$$\text{d'où} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

$$g) \quad f_n(x) = n^2 \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right)$$

$$\text{si } x = 0 \quad \text{donc} \quad f_n(0) = 0$$

$$\text{si } x \neq 0$$

$$f_n(x) = n^2 \left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{x}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{24} - 1 + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^4\right) \right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24n^2} + o\left(\frac{x^4}{n^2}\right)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{d'où} \quad f_n \quad \text{cv. simplement sur } \mathbb{R}$$

$$\text{vers} \quad f(x) = -\frac{x^2}{2}$$

Exercice 2

$$\forall n \geq 1 \quad f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

$$1. \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{n}{x}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{si } x = 0 \quad f_n(x) = 0$$

$$\text{d'où} \quad f_n(x) \text{ converge simplement vers } 0.$$

$$2. a. \quad f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{x}{(x+n)^2} > 0$$

$$\text{donc } f_n(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$$

donc f_n ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$

3. $a > 0$

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| = |f_n(a)| = \frac{a}{a+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

on a donc convergence uniforme sur $[0, a]$

Exercice 3

$$x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad x \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f_n(x) &= n \left(\frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n}\right)^3 \frac{1}{3} + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^3\right) \right) \\ &= x - \frac{x^3}{n^2 3} + o\left(\frac{x^3}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

$$x = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(0) = 0$$

Il vient que $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$

$$2) a. \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{1+u^2} \leq u^2$$

$$\frac{1}{1+u^2} \leq 1 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

$$1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2} \leq u^2$$

$$0 \leq u - \arctan(u) \leq \frac{1}{3} u^3$$

par intégration

b) $a \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - x|$$

$$\sup_{x \in [0, a]} |n(\arctan(\frac{x}{n}) - \frac{x}{n})| \leq \sup_{x \in [0, a]} |n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{n^3}|$$

$$\sup_{x \in [0, a]} |\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{n^2}| = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

on a donc convergence uniforme sur $[0, a]$

3.