



Exercice 7

$$u_n = \frac{1}{1+n^2x}$$

$$\text{soit } x \in \mathbb{R} \text{ fixé } \sum \frac{1}{1+n^2x}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2x} dt &= \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2} \frac{1}{\sqrt{x}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\sqrt{x}} [\arctan(u)]_0^{A\sqrt{x}} \\ &= \frac{\arctan(A\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$1) \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2x} \quad x > 0 \text{ fixé } \frac{1}{x} \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

donc la série de fonctions converge

$$2) \quad \text{Soit } x > y \in \mathbb{R}_+.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n(y) > u_n(x)$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^N u_n(y) > \sum_{n=0}^N u_n(x)$$

$$\text{et } S(y) \geq S(x)$$

$$3) \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n_0} u_n(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(x)$$

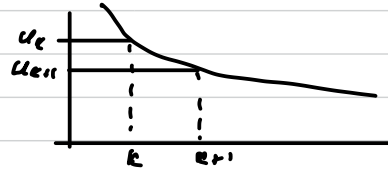
$$\text{donc } S(x) \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{On sait que } \exists n_0 \text{ tq } \forall n > n_0 \quad \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) < \varepsilon$$

$$\text{car } \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ série convergente}$$

4)

$$(*) \begin{cases} u_n(x) \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{1+t^2x} dt \\ u_n(x) \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{1+t^2x} dt \end{cases}$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x} dt \leq \sum_{n=0}^n u_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^n u_n(x) \leq 1 + \int_0^n \frac{1}{1+t^2x} dt$$

(Relation de Charles)

comme $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x} dt$ cv.

on passe à la limite (par rapport à n) et on a
 $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$

5) équivalent de $S(x)$ en 0^+

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \leq S(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

$$1 \leq \frac{2\sqrt{x}}{\pi} \leq 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\pi}$$

donc $\frac{2\sqrt{x}}{\pi} \xrightarrow{0^+} 1$ (glendarmer)

et $S(x) \sim \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ en 0^+

6) u_n or norm. sur $[a, +\infty[$

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} u_n(x) = u_n(a) = \frac{1}{1+n^2a}$$

$$\sum \frac{1}{1+n^2a} \text{ cv } \forall a > 0$$

donc on a cv.

7] $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$\sum u_n$ cv. normalement sur $[a, +\infty[$

$S(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$

qui est vrai $\forall a > 0$

d'où $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par union.

Exercice 8