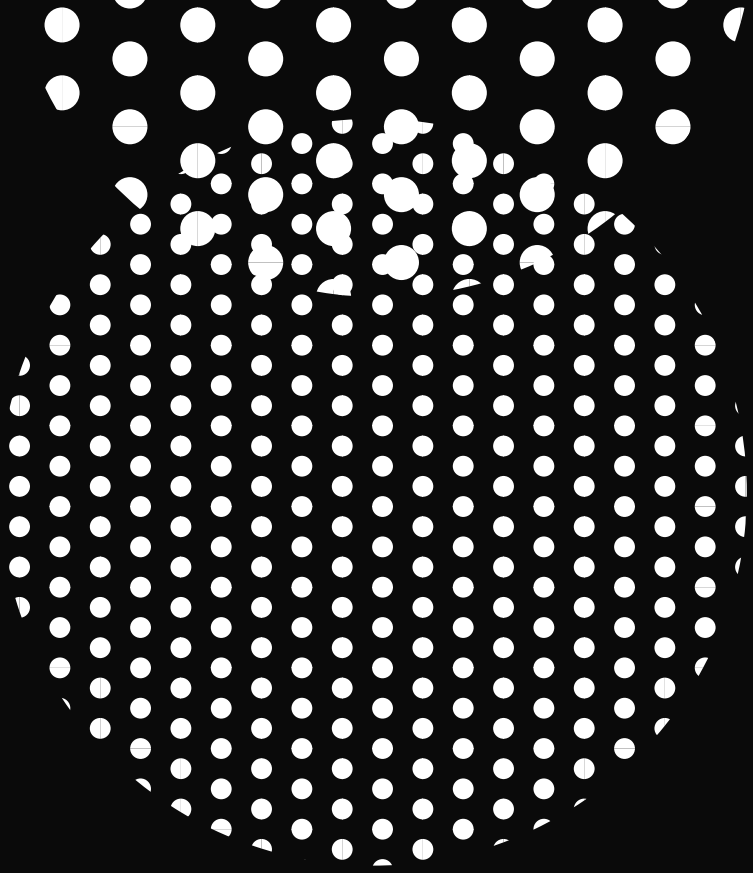


Exercice 4 (a) → F2

b) $f_n : x \in [-a,a] \longmapsto e^{-(x-n)^2}$

si $n \geq a$ alors centre (maximum) est en dehors de $[-a,a]$, et sur $[-a,a]$ $f_n(x)$ est très petit.

$\underline{n \geq a}$ on a :

$$\sup_{x \in [-a,a]} f_n(x) = f_n(a) \quad \text{(car c'est le sup de } -(x-n)^2 \text{ et exp croissante)}$$

$$= e^{-(a-n)^2} \leq e^{-n^2}$$

$N > a$:

$$\sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\lfloor a \rfloor} \|f_n\|_\infty + \underbrace{\sum_{n=\lfloor a \rfloor + 1}^{N} \|f_n\|_\infty}_{\text{suite convergente (par comparaison)}}$$

→ on vérifie que si même le centre (maximum) est sur $[-a,a]$ $f_n(x)$ est toujours très petit.

$\underline{n < a}$: $f_n(x) \leq f_n(n) < \infty$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{\lfloor a \rfloor} \|f_n\|_\infty < \infty$

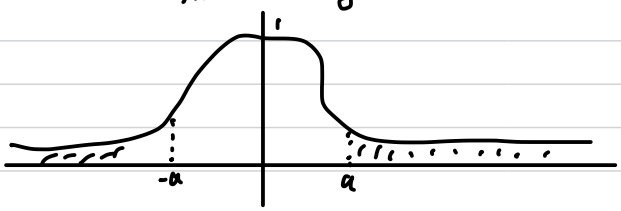
et f_n converge normalement.

c) $f_n : x \in]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[\longmapsto e^{-n^2x^2}$

$x \in I$, $e^{-(nx)^2} \leq e^{-(na)^2}$

$\|f_n\|_\infty \leq e^{-(na)^2}$

donc f_n converge normalement par comparaison. $(e^{a^2})^{-n^2}$



d) $f_n : x \in [-a, a] \longmapsto e^{-(nx)^2}$

$\|f_n\|_\infty = 1$ (car $e^{-(n0)^2} = e^0 = 1$)

d'où $\sum f_n$ ne converge pas

Exercice 5

Soit $u_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour $n \geq 1$

1) $\forall n, \forall x \quad \arctan(nx) \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \quad u_n(x) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$ mais $\sum \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ converge.

D'où $\sum u_n$ cv. normalement sur $[0, +\infty[$

2) Soit $a > 0 \quad I = [a, +\infty[$

$\sum_{n \geq 1} u_n' = \sum \frac{n}{1+(nx)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n + x^2 n^3}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n + x^2 n^3} \leq \frac{1}{a^2 n^3}$

dont la série cv. $\Rightarrow$ d'où $\sum u_n'$ cv.

3) u_n est C^0 sur $]0, +\infty[$

de plus dans 1) on a montré que $\sum u_n =: S$ converge normalement sur $[0, +\infty[\supset]0, +\infty[$ alors simplement aussi

Donc par le thm du cours S est continue.

De plus $\sum u_n'$ cv. norm. sur $]0, +\infty[$, d'où

$S' = \sum u_n'$ d'où S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

Exercice 6

Soit $u_n : x \in [0,1] \longmapsto \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$. $n \geq 2$

1] $n-1 \geq 1 \quad \forall n, x$

$n+x \geq 2 \quad \forall n, x$

d'où u_n est continue sur $[0,1]$

$\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n+x}{n^2-x^2} = \frac{2x}{n^2-x^2}$ en $x=1$ $|u_n|$ admet un maximum.

d'où $|u_n| \leq \frac{2}{n^2-1}$ mais $\sum \frac{2}{n^2-1}$ cv.

d'où $\sum u_n$ cv normalement.

2. Soit $u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$

Etudions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2}$

$\leq \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$ dont la série converge.

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$ converge normalement.

Or $\sum u_n$ cv. simplement et $\sum u_n'$ cv normalement.

donc $u'(x) = \sum u_n'(x)$ et u est C^1 sur $[0,1]$

3. Par 1] $u = \sum u_n(x)$ converge normalement sur $[0,1]$ et $u_n(x)$ sont continues sur $[0,1]$

Donc u est intégrable et

$\int_0^1 u(x)dx = \int_0^1 \sum u_n(x)dx = \sum \int_0^1 u_n(x)dx$

$\int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\, dx = [-\ln(n-x) - \ln(n+x)]_0^1$

$= [\ln(\frac{1}{n-x}) + \ln(\frac{1}{n+x})]_0^1$

$= \ln(\frac{1}{n-1}) - \ln(n+1)$

$- \ln(\frac{1}{n}) - \ln(\frac{1}{n})$

$= \ln(\frac{n}{n-1}) - \ln(\frac{1}{n+1})$

D'où $\int_0^1 u(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right)$

4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{v_n} - \underbrace{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}_{v_{n+1}}$ → série téléscopique

donc $\xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{\ln\left(\frac{2}{2-1}\right)}_{\ln 2} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(2)$ car $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'où $\int_0^1 u(x)dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(2)$