



Convergence uniforme pour les séries de fonctions

Déf: Soit (f_n) une suite de fonctions sur l'intervalle I .

On dit que $\sum f_n$ converge simplement (uniformement) sur I si la suite $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (uniformement) sur I .

Rq: Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors $\|f_n\|_I \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
En effet, on prend $n, m = n+1$ dans la condition de Cauchy uniforme.
Si $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N \|\sum_{k=0}^n f_k - \sum_{k=0}^m f_k\|_I = \|\sum_{k=n+1}^m f_k\|_I \leq \varepsilon$

$$\text{Si } m = n+1, \|\sum_{k=n+1}^m f_k\|_I = \|f_{n+1}\|_I \leq \varepsilon$$

D'où par la définition de la limite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_I = 0$

En particulier, convergence uniforme de $\sum f_n$ sur I implique que toute f_n est bornée sur I .

Si f_n sont continues
et $\sum f_n$ converge uniformément
Alors $\sum f_n$ est continue

Thm A: Soit $f_n \in C^0(I)$, I un intervalle non-dégénéré. Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum f_n \in C^0(I)$.

Thm B: Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I , I intervalle non-dégénéré. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors $\sum f_n$ est dérivable sur I et $(\sum f_n)' = \sum f'_n$

Thm C: Soit $f_n \in C^0([0,1])$ $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n dx$

Convergence normale:

Déf: Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur l'intervalle I .

On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur I si $\sum \|f_n\|_I$ converge.

Rq: Pour constater la convergence normale il suffit de trouver une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\rightarrow \|f_n\|_I \leq \alpha_n$
 $\rightarrow \sum \alpha_n$ converge

Thm (Weierstrass): Si $\sum f_n$ converge normalement sur $\tilde{I}$,
 I un intervalle, alors $\sum f_n$ converge uniformément
sur I .

P.V.: On va montrer Cauchy - uniforme: Soit $n > m$

$$\left\| \sum_{k=0}^n f_k - \sum_{k=0}^m f_k \right\|_I \leq \|f_{m+1} + \dots + f_n\|_I \text{ Par l'inégalité triangulaire}$$

$$\leq \|f_{m+1}\|_I + \dots + \|f_n\|_I \text{ donc nous avons la condition de Cauchy}$$

uniforme

car $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_I$ converge donc satisfait la condition de Cauchy.

Ex.: Soit $I = [-a, a]$ $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = \frac{x}{n^2}$

La série $\sum f_n$ converge normalement sur I .
 En effet $\left\| \frac{x}{n^2} \right\|_{[-a, a]} = \frac{1}{n^2} \|x\|_{[-a, a]} = \frac{a}{n^2}$

La série numérique $\sum \frac{x}{n^2}$ converge.

Rq.: Conv. normale $\Rightarrow$ conv. uniforme $\Rightarrow$ conv. simple

$\rightarrow$ Prenons $I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\left\| \frac{x}{n^2} \right\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2} \|x\|_{\mathbb{R}} = +\infty$$

La série ne converge pas uniformément.

Ex.: $f_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n}$ $x \in [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

• Conv. normale: $\|f_n\|_{[-a, a]} = \sup_{|x| \leq a} \left| \frac{(-1)^n x}{n} \right| = \frac{a}{n}$

La série $\sum \frac{a}{n} = +\infty$, donc il n'y a pas de convergence normale.

• Conv. uniforme: Soit $x \in [0, a]$, $\sum f_n(x)$ est une série alternée
 et $\frac{x}{n}$ décroît vers 0. D'où $\sum f_n(x)$ converge.

Par encadrement du reste: $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{k} \right| \leq \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{a}{n+1}$

$$\forall x \in [0, a], \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{k} \right| \leq \frac{a}{n+1} \Rightarrow \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{k} \right\| \leq \frac{a}{n+1}$$

Nous avons la conv. uniforme sur $[0, a]$ car $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x}{k} \right\|_{[0, a]}$
 $= \|R_n(x)\|_{[0, a]} \leq \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

De même façon on montre conv. uniforme sur $[-a, 0]$
D'où on constate la conv. uniforme $\sum f_n$ sur $[-a, a]$