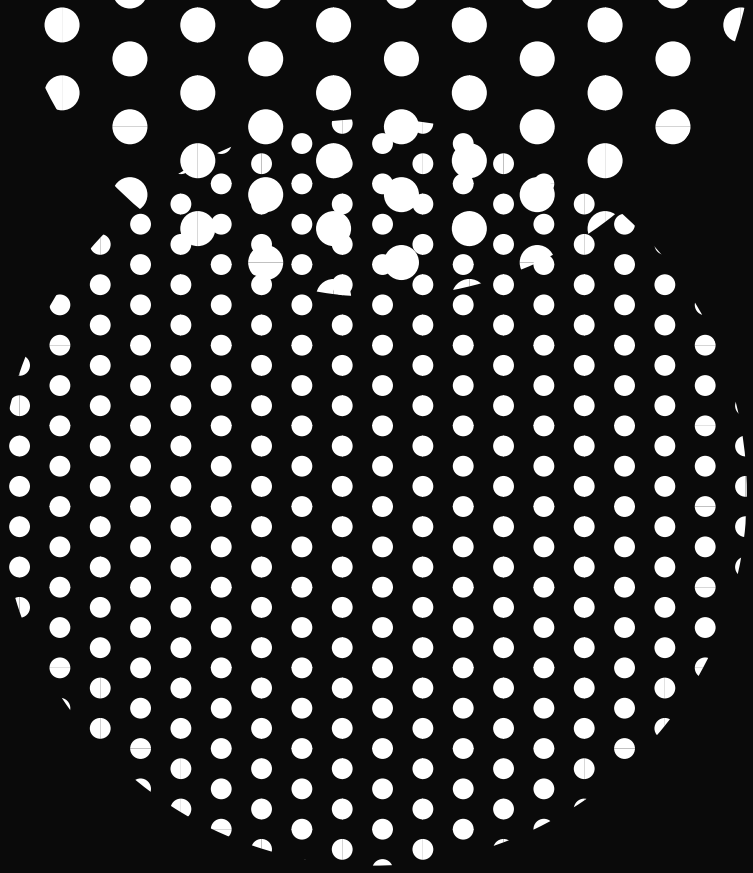


Suites et séries de fonctions

Motivation: $1-1+1-1+1-1=?$

$\sum u_n$ où $u_n=(-1)^n$ donc $\lim u_n \neq 0$

La série $\sum u_n$ ne converge pas.
Introduisons $x \in]0,1[$ et posons
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = x^0 - x^1 + x^2 - x^3 \dots = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots$ série géométrique

$$\sum u_n := \lim_{x \to 1} \sum u_n x^n = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lim_{x \to 1} x^n = \sum u_n$$

"$1-2+3-4+5-6 \dots = \frac{1}{4}$"

Soient $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonctions définies sur un intervalle I
($[a,b]$, $]a,b[$, $]-\infty,b[$ etc.)

<u>Déf:</u> La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ si $\forall x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$
i.e si $\forall x \in I$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
$\equiv \forall x \in I$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

<u>Ex:</u> $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$
$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ $f_n(1) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \text{ où } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

f est discontinue sur $[0,1]$

Convergence simple

simple pour tout x et ε on peut trouver N tq $f_n(x) \approx f(x)$ $n \geq N$

uniforme, pour tout ε ON PEUT TROUVER N tq $\forall x$ $f_n(x) \approx f(x)$

pour simple, N peut varier dépendant de x, donc au moins la dérivé peut être différente dépendant de x, de n

pour uniforme, N est indépendant de x, donc dérivée est la même pour f_n et f

Limite uniforme

l'ordre est différent!

Déf: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I est un intervalle.
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$
si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall x \in I$ $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\forall x \in I$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ -> pour conv. simple

Ex: $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\dfrac{\sin(nx)}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
D'où (f_n) converge simplement vers $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\frac{1}{N} < \varepsilon$
si $n \geq N$ $\left| \dfrac{\sin(nx)}{n} - f(x) \right| = \left| \dfrac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N} < \varepsilon$

Conclusion: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur $\mathbb{R}$.

Rq: Par logique: conv. uniforme implique convergence simple.

On montre que $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformement

Ex: $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$
$\lim f_n(x) = 0$ $\forall x \in [0,1[$ (f_n) ne converge pas uniformement vers la fonction constante f égale à 0 sur $[0,1[$

Supposons que la convergence vers f est uniforme.
Prenons $\varepsilon = \frac{1}{10}$ Donc $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\forall x \in [0,1[$ $x^n = |x^n| \leq \frac{1}{10}$

En particulier, nous avons $\forall n \geq N$ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{10}$
$(x = 1 - \frac{1}{n})$ $\downarrow n \to +\infty$
e^{-1}

D'où $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{10} \iff e \geq 10$
Contradiction

Metric space : set/space where we can calculate the distance between points

Closed set = where the border of a set is included in the set: $]1,2[$ is not closed.

Compact space = bounded, closed

Soit I un intervalle. L'espace $C^0(I)$ est un espace vectoriel réel :

- $\forall f,g \in C^0(I) \quad \forall x \in I \quad (f+g)(x) \overset{def}{=} f(x)+g(x)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall f \in C^0(I) \quad \forall x \in I \quad (\alpha f)(x) \overset{def}{=} \alpha f(x)$

Ex: $\underset{\text{vect nul}}{0} \in C^0(I)$ est la fonction constante égale à 0

On introduit la norme sup $\|f\|_I = \sup_{x \in I} |f(x)|$ pour toute $f \in C^0(I)$ bornée

$\|\cdot\|_I$ est une norme car

1) $\forall f \in C^0(I) \quad \|f\|_I = 0 \iff f$ est nulle
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall f \in C^0(I) \quad \|\alpha \cdot f\|_I = |\alpha| \cdot \|f\|_I$
3) $\forall f,g \in C^0(I) \quad \|f+g\|_I \leq \|f\|_I + \|g\|_I$

Rq: L'espace de fonctions bornées sur I est un espace vectoriel normée avec $\| \ \|_I$

Prop: (f_n), $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervalle converge uniformement vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi $\|f - f_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \exists \alpha_n \ \lim \alpha_n = 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$

Ex: $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n} \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2-nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$

$n \in \mathbb{N}^* \quad x \in [0,1]$

$f_n \in C^0([0,1])$

1) (f_n) converge simplement vers $f(x) = 0$

$\forall x \in [0,1]$. En effet, si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si $x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{2}{N} < x \Rightarrow \forall n \geq N$

$\frac{2}{n} < x \quad \forall n \geq N$

D'où $\forall n \geq N \quad f_n(x) = 0$

$\|f - f_n\|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$

(f_n) ne converge pas uniformement vers f sur $[0,1]$.

$\|f_n(x)\|_I$ = la valeur maximale possible de $f_n(x)$ sur I

si $\|f_n(x)\| \neq 0$ donc $f_n(x)$ ne converge pas uniformément.

Prop: [Condition uniforme de Cauchy]

Soit (f_n) : $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I - intervalle, f_n converge uniformement vers une fonction sur I $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n,m \geq N$ $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$

pv: Si $f_n \longrightarrow f$ uniformément alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\|f_n - f\|_I \leq \varepsilon$

Soit $n,m \geq N$ $\|f_n - f_m\| = \|(f_n - f) - (f_m - f)\|_I \leq \|f - f_n\|_I + \|f - f_m\| \leq 2\varepsilon$

poly page 8

si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall m,n \geq N$ $\|f_n - f_m\|_I \leq \varepsilon$ alors

•) Si $x \in I$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_I \leq \varepsilon$ donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ forme une suite de Cauchy, et donc converge.

On peut donc définir la fonction limite $f(x) = \lim f_n(x)$ $\forall x \in I$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n,m \geq N$ $\forall x \in I$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$$\downarrow n \to +\infty$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$ $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $\|f - f_n\|_I \leq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc f_n conv. unif. vers f sur I

Propriétés de limite uniforme:

1) Linéarité: Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur I (intervalle) vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ respectivement alors $\forall \alpha, \beta$ $(\alpha f_n + \beta g_n)$ conv. unif. $\underline{\alpha f + \beta g}$.

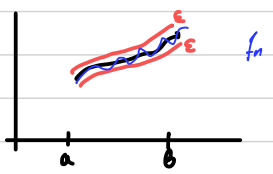
pv: $\|\alpha f_n + \beta g_n - (\alpha f + \beta g)\|_I = \|\alpha(f_n - f) + \beta(g_n - g)\|_I \leq |\alpha| \|f_n - f\|_I + |\beta| \|g_n - g\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Thm: Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur I, I un intervalle non-dégeneré, $\# I > 1 \Leftrightarrow \# I = +\infty$

Supposons que (f_n) converge uniformement vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur I.

Alors, $\underbrace{f \in C^0(I)}_{\Leftrightarrow f \text{ est continue}}$

pv:



Soit $x \in I$. Soit $|x - y| \leq \delta$, $\underline{\delta > 0}$ est à preser. Soit $\varepsilon > 0$

$|f(x) - f(y)| \leq |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(y)) + (f_n(y) - f(y))|$

$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f(y) - f_n(y)|}_{\leq \varepsilon}$

(f_n) conv. unif. vers f sur I.

(f_n) converge uniformement sur I vers $f : I \to \mathbb{R}$ et f_n sont continue $\forall n$ $\Rightarrow$ f est continue

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $\forall z \in I$ $|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$

Soit $n = N$; $z = x$ ou $z = y$

Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

$|f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x. Alors, $\exists \delta > 0$ (dépend à n et ε)

tel que $\forall$ $y \in]x-\delta, x+\delta[\cap I$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$

Donc on a précisé $\delta \leq \delta(n, \varepsilon, x)$

Alors, $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$ si $\delta \leq \delta(n, \varepsilon, x)$

<u>Rq:</u> Soient $f_n \in C^0(I)$, (f_n) conv. uniformement vers $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Soit $x \in I$, $\# I > 1$ (intervalle non-dégénéré)

$$\lim_{y \to x} f(y) = \boxed{\lim_{y \to x} \lim_{n \to +\infty} f_n(y)}$$

<u>Thm:</u> $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \boxed{\lim_{n \to +\infty} \lim_{y \to x} f_n(y)}$

<u>Thm 2:</u> Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I, I intervalle non-dégénéré. Supposons que (f_n) converge simplement vers f sur I et (f_n') converge uniformement vers $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Alors, f est dérivable, sur I et $\forall x \in I$, $\boxed{f'(x) = g(x)}$

<u>Rq:</u> $\left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x)\right]' = \lim_{n \to +\infty} f_n'(x)$

<u>Thm 3:</u> Soit $I = [a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$

Supposons que (f_n), $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue, converge uniformement vers f sur I. Alors, $\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

<u>Ex:</u> $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{n^2}$$

pente

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]n, 2n[\\ \frac{2}{n^2}(x-n) & x \in]n, \frac{3}{2}n] \\ -\frac{2}{n^2}(x-2n) & x \in]\frac{3}{2}n, 2n[\end{cases}$$

Obs:

1) (f_n) converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = 0^x$

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $N > x$

Alors $\forall n \geq N$, $n \geq N \geq x$, d'où $\forall n \geq N \quad f_n(x) = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

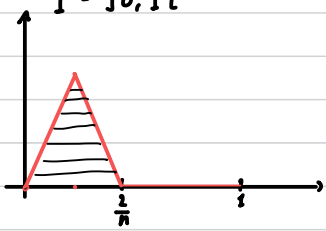
2) La convergence est uniforme $\|f_n - f\|_{\mathbb{R}_+} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$\int_0^{+\infty} \lim f_n(x)\, dx = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ex:

$I =]0, 1[$



(f_n) conv. simplement vers $f \equiv 0$ sur I.

Mais $\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$

$\int_0^1 \lim f_n(x)\, dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$

pv du thm 3:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\, dx$$
$$\leq \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)|\, dx = \int_a^b \|f - f_n\|_{[a,b]}\, dx = \|f - f_n\|_{[a,b]} (b-a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Rq: Thm 3 $\Longrightarrow$ Thm 2'

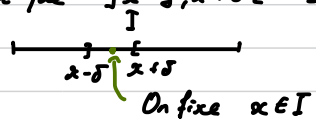
Thm 2': $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n \in C^1(I)$.

Supposons que (f_n) converge simplement vers f et (f_n') conv. uniformement vers $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, Alors $f \in C^1(I)$ et $\forall x \in I$ $f'(x) = g(x)$

Indication : Utiliser le thm $\left(\int_a^x g(t)\, dt \right)' = g(x)$

pv du thm 2 :

Pour simplicité, supposons que I est ouvert, donc pour tout $x \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset I$



Soit $h(x) = \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ si $t \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ et $h(0) = g'(x)$

Rappel: $\lim f_n = f$, $\lim f_n' = g$
$\|g - f_n'\|_I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Observons que f est dérivable en x ssi $h :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0.

En effet, continuité de h en $0 \iff \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$

Posons $h_n(t) = \dfrac{f_n(x+t)-f_n(x)}{t}$ si $t \neq 0$ et $h_n(0) = f_n'(0)$
La fonction $h_n :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Question principale:
(h_n) converge-t-elle uniformement sur $]-\delta, \delta[$?

On teste Cauchy uniforme $\sup\limits_{t\neq 0} \left| \dfrac{f_n(x+t)-f_n(x)}{t} - \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \right|$
On applique le thm des accroissement finis pour $f_n - f_m$ entre $x+t$ et x
$\exists y \in]x, x+t[$

$$= \left| \frac{(f_n-f_m)(x+t) - (f_n-f_m)(x)}{t} \right| = \left| \frac{(f_n-f_m)(y)\cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} \right| = |(f_n-f_m)'(y)|$$

$\leq \|f_n' - f_m'\|_I$ car $y \in I$

$$\sup_{t\neq 0} \left| \frac{f_n(x+t)-f_n(x)}{t} - \frac{f_m(x+t)-f_m(x)}{t} \right|$$

$= \|h_n - h_m\|_{]-\delta,\delta[\setminus\{0\}} \leq \|f_n' - f_m'\|_I$
Si $t=0$ $|h_n(0) - h_m(0)| = |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \|f_n' - f_m'\|_I$

D'où (h_n) satisfait la condition de Cauchy uniforme sur $]-\delta, \delta[$
Donc h_n conv. uniformement sur $]-\delta, \delta[$ vers $h :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$
Par thm 1, $h \in C^0(]-\delta, \delta[)$. En particulier, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = g(x)$
Donc $\underline{f'(x) = g(x)}$