



Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$$

1. Développement asymptotique

$$u_n = \ln(n) + a \cdot \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + b \cdot \ln\left(n\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)$$

$$= \ln(n) + a\left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) + b\left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)$$

par de de $\ln(1+x)$ qd $x \rightarrow 0$,

$$u_n = (1+a+b) \ln(n) + \frac{1}{n}(a+2b) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{2} - 2b\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. en déduire les valeurs de a et b pour que $\sum u_n$ converge

$$\begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1-b \\ -1-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

car on veut que $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ pour que la série converge, il faut donc que les termes en $\ln(n)$ et $\frac{1}{n}$ soient nuls.

$$\begin{aligned} 3. \quad u_n &= \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \ln(n) - \ln(n+1) - (\ln(n+1) - \ln(n+2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \ln(1) - \ln(n+1) - \ln(2) + \ln(n+2) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \quad \text{or } \frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et donc que } \sum_{n=1}^N u_n \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Exercice 11

$$u_n = \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n} \quad \text{pour } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} u_n - \frac{(-1)^n}{n} &= \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n} - \frac{(-1)^n}{n} \\ &= \frac{n - (\ln(n)(-1)^n + (-1)^n n)}{n \ln(n) + (-1)^n n^2} = \frac{-\ln(n)(-1)^n}{n^2 (\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n)} \end{aligned}$$

$$v_n = \frac{-\ln(n)}{n^2 (\frac{\ln(n)}{n} + (-1)^n)} \sim \frac{-\ln(n)}{n^2}$$

par croissance comparée

or $-\frac{\ln(n)}{n^2}$ est une série de Bertrand convergente,
il vient que $\sum v_n$ converge

2. $u_n = v_n + \frac{(-1)^n}{n}$

Or $\frac{(-1)^n}{n}$ converge par critère des séries alternées,
et v_n converge par (5), comme elle est une somme
des suites convergentes, donc $\sum u_n$ converge aussi.

Exercice 12

$$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2} \right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos t}{t^2} dt$$