



Critère de Leibnitz :

Si u_n est de la forme $(-1)^n v_n$, donc $\sum u_n$ converge si :

- v_n est décroissante : $(v_{n+1} \leq v_n \forall n)$
- et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Soit $\sum u_n$ série alternée, i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n v_n, v_n \geq 0$ et $|u_n| = v_n$ décroît vers 0. Alors, $\sum u_n$ converge.

Encadrement du reste

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| = |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

pv :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k = v_0 - v_1 + v_2 - v_3 + \dots + (-1)^n v_n$$

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \underbrace{(v_0 - v_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(v_2 - v_3)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(v_{2n} - v_{2n+1})}_{\geq 0} \\ &= S_{2n-1} + (v_{2n} - v_{2n+1}) \geq S_{2n-1} \end{aligned}$$

On déduit que $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= v_0 - \underbrace{(v_1 - v_2)}_{\geq 0} - \underbrace{(v_3 - v_4)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(v_{2n-1} - v_{2n})}_{\geq 0} \\ &= S_{2n-2} - (v_{2n-1} - v_{2n}) \leq S_{2n-2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$v_0 - v_1 = S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - v_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0$$

D'où $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée

$$\text{Alors, } \lim S_{2n} = S^* \in \mathbb{R}$$

$$\lim S_{2n+1} = S^* \in \mathbb{R} \quad \text{("0")}$$

$$S^* = \lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} - \lim v_{2n+1} = S^*$$

$$\text{D'où } S = S_n = S^*$$

La démonstration montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S \text{ est entre } S_n \text{ et } S_{n+1} \quad (S \in [S_{n+1}, S_n])$$

$S = S_n + R_n$ se trouve entre S_n et S_{n+1} . Alors,

$$|R_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$$

Leibnitz: $\sum (-1)^n u_n$

si u_n décroissante et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Alors $\sum (-1)^n u_n$ converge

Critère d'Abel:

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante
et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que:

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M \Leftrightarrow \sum u_n$ est bornée
Alors $\sum v_n u_n$ converge.

Ex: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ est convergente.
 $x \in \mathbb{R}$ paramètre réel. Si $x=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

Critère d'Abel

$$v_n = \frac{1}{n}; \quad u_n = \sin(nx)$$

v_n est décroissante, de plus tend vers 0.

Il nous reste à vérifier que $\sum \sin(nx)$ est bornée.

Calculons:

$$\begin{aligned} & \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) \\ &= \Im(e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx}) \\ &= \Im(e^{ix}(1 + e^{ix} + \dots + e^{i(n-1)x})) \\ &= \Im(e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}) \end{aligned}$$

$$\left| \sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx) \right| = \left| \Im \left(\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \right| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{On sait que } \forall z \in \mathbb{C} \\ |\Im(z)| \leq |z| \end{array} \right.$$

$$\leq \left| \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \frac{|e^{ix} - e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|}$$

$$\leq \frac{|e^{ix}| + |e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$

$$1 - e^{ix} = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 \bmod 2\pi$$

Dans ce cas: $\sin(nx) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Par Abel, $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ converge.

Abel: $\sum u_n v_n$ converge ssi: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq M \in \mathbb{R}_+$

et v_n décroissante.

par du Critère d'Abel:

Poseons, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_k$

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| \leq M ; v_n \searrow 0.$

On veut mq T_n converge.

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \\ &= S_0 v_0 + (S_1 - S_0) v_1 + (S_2 - S_1) v_2 + \dots + (S_n - S_{n-1}) v_n \\ &= S_0 (v_0 - v_1) + S_1 (v_1 - v_2) + \dots + S_{n-1} (v_{n-1} - v_n) + S_n \cdot v_n \end{aligned}$$

Bonne nouvelle: $S_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n \cdot v_n$$

Pour constater convergence de (T_n) , il suffit de montrer la convergence $\sum S_k (v_k - v_{k+1})$

On va mq $\sum S_k (v_k - v_{k+1})$ converge absolument.

i.e $\sum |S_k (v_k - v_{k+1})| < +\infty$

Par comparaison, $\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n (v_n - v_{n+1})| \leq M |v_n - v_{n+1}| = M (v_n - v_{n+1})$

d'où il suffit de mq: $\sum M (v_n - v_{n+1}) = M \sum (v_n - v_{n+1})$

Mais $\sum (v_n - v_{n+1})$ est télescopique donc convergente car (v_n) est convergente

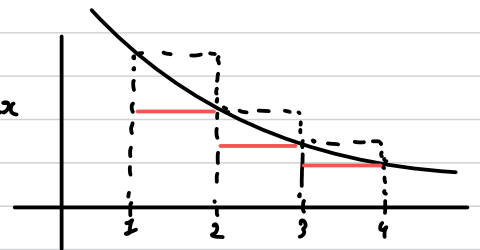
$\sum \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right|$ ne converge pas si $x \neq 0$

Série harmonique - révisée

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(n)$$

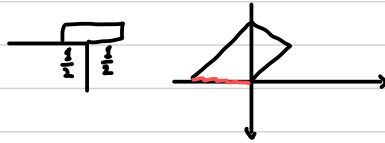
$$1 \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Alors, $H_n \sim \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

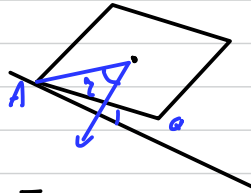


Empilage de blocs:

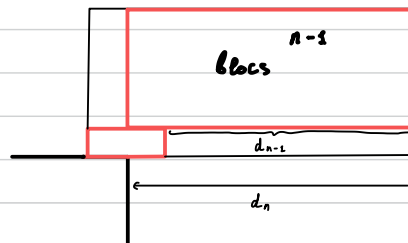
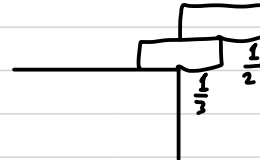
$\boxed{}_{l=1} \quad m=1 \quad g \sim 10 \frac{m}{s^2}$



$\Pi(C_m)$
= projection verticale
de C_m appartenant
à la base.



$T_A = z \cdot m \cdot g$



Tant que
= $n \cdot g \cdot d_n = (n-1)g \cdot d_{n-1}$
+ $(d_{n-1} + \frac{1}{2})g$

$d_n = d_{n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} + \dots + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot H_n \sim \frac{1}{2} \ln n$

Techniques de Sommation:

1) Sommation par paquets (poly)

2) Utilisation de DL.

Pour déterminer la nature de $\sum u_n$ on peut effectuer un développement limité du terme u_n au voisinage ∞
Pour faire apparaître des termes en $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, ..., etc

Ex: $\sum u_n$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n}$, $\sum u_n$ est alternée, $|u_n| \rightarrow 0$ mais $|u_n| \not\sim$
 $|u_n| = \frac{1}{n + (-1)^n \ln n}$ est décroissante ssi $n = (-1)^n \ln n$ est croissante
n'est pas croissante.

On ne peut pas utiliser Leibnitz !

$$\text{Dd: } u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln n} = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{(-1)^n \ln n}{n}}_{y_n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

$$\frac{1}{1 + y_n} = 1 - y_n + o(y_n)$$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(-1)^n \ln n}{n} + o(y_n) \right] = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\ln n}{n^2} (1 + o(1))$$

On sait que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ car $\ln n \leq \frac{n^1}{n^{3/2}} = n^{-1/2} = n^{-\frac{1}{2}}$
car $\ln n \leq \sqrt{n}$
car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ par l'Hôpital
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ $\frac{0}{\infty} = 0$

$$\left| \frac{\ln n}{n^2} (1 + o(1)) \right| \sim \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \text{ pour } n \text{ assez grand}$$

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge car } \frac{3}{2} > 1$$

Conclusion: $\sum u_n$ convergente