



Séries à termes positives

Déf: On dit que $\sum u_n$ est à terme positif
si: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

Observation:

$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est la somme partielle d'ordre (n)

alors (S_n) est croissante.

On a donc deux possibilités:

1) (S_n) converge $\Leftrightarrow (S_n)$ est majorée
 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M$

2) (S_n) est divergente vers $+\infty$

par de l'obs:

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^n u_k = u_{n+1} + S_n \geq S_n$$

Ex: (*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est télescopique et convergente

$$\text{car } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(**) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ← série harmonique

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente vers $+\infty$

Notation: pour les séries à termes positifs on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ pour indiquer divergence.}$$

Donc, en général: si $u_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n < +\infty$
 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ diverge}$$

Principe de comparaison:

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à termes positifs,
i.e. $u_n \geq 0, v_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$

Alors, si $\sum v_n < +\infty \Rightarrow \sum u_n < +\infty$

.. Alors, $\sum u_n = +\infty \Rightarrow \sum v_n = +\infty$

pv: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad T_n = \sum_{k=0}^n v_k$

$$u_0 \leq v_0$$

$$u_1 \leq v_1$$

...

$$u_n \leq v_n$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k = T_n$$

Or (T_n) est majorée,

la suite (S_n) est majorée aussi
et donc convergente.

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$$

Contraposé

Ex: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge-t-elle?

$$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ n+1 := n \end{array}$$
$$= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)n} \leq 1 \quad (1)$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ conv. par principe de comparaison.

Principe d'équivalence

Déf: $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.

On dit que $u_n \sim v_n$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$

$\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0, \forall n \geq n_0, v_n \neq 0, u_n \neq 0 \end{array} \right.$

Remarque: $\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$

Mais $\frac{1}{n} \neq 0 \quad (0)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$

Propriétés: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ $u_n \sim v_n \Rightarrow \alpha u_n \sim \alpha v_n$

$$\forall \begin{matrix} (u_n), (u'_n) \\ (v_n), (v'_n) \end{matrix} \quad \begin{matrix} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{matrix} \Rightarrow u_n \cdot u'_n \sim v_n \cdot v'_n$$

MAIS, en général:

$$\begin{matrix} u_n \sim v_n \\ u'_n \sim v'_n \end{matrix} \not\Rightarrow u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$$

Principe d'équivalence: Soient $\sum u_n, \sum v_n$ à termes positifs.
si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n, \sum v_n$ sont de la même nature.

Ex: $u_n = \frac{2^n + \sin n}{3^n + (-1)^n \cdot n}$

$\sum u_n$ converge-t-elle?

• $\underline{u_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1} \quad -1 \leq \sin n \leq 1$

$$u_n = \frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{1 + \frac{\sin n}{2^n}}{1 + \frac{(-1)^n \cdot n}{3^n}} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n = v_n$$

$\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge comme la série
géométrique de raison $0 < q < 1$

Ex:

$$u_n = \frac{2 + \sin n}{n^2}$$

$\sum u_n$ est convergente par principe de comparaison:
 $v_n = \frac{3}{n^2}$

• $\forall n \geq 1, u_n \geq 0$

• $\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{2+1}{n^2} = \frac{3}{n^2}$

Critère de Cauchy:

Soit $\sum u_n$, $u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Posons $\alpha_n = u_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u_n}$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ alors

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si $\alpha < 1$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge si $\alpha > 1$

(3) On peut rien dire en général sur la nature
 $\sum u_n$ si $\alpha = 1$

pr: Principe de comparaison
avec les séries géométriques.

Soit $\alpha < 1$. Prenons $\alpha < r < 1$

Alors, pour tout n à partir

d'un certain rang n_0 ,

$$\forall n \geq n_0, \alpha_n^{\frac{1}{n}} = \alpha_n < r \Leftrightarrow u_n < r^n$$

La série géométrique $\sum r^n$

est convergente car $0 < r < 1$

D'où $\sum u_n$ converge (p. de. compar.)

Si $\alpha > 1$: $\Rightarrow u_n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ à partir d'un certain rang

d'où $u_n \geq 1$ pour n assez grand

et $u_n \not\rightarrow 0$

Donc $\sum u_n$ diverge

$\alpha = 1$: $\sum \frac{1}{n^2} \quad \sum \frac{1}{n}$

Critère de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ à termes strictement positifs.

$$\text{Posons } \beta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\text{Soit } \beta = \lim \beta_n$$

$$\text{Si } \beta < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$\beta > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

$$\beta = 1 \quad \text{on peut rien dire}$$

Exemple:

$$\sum u_n ; u_n = \frac{x^n}{n!} \quad \underline{x \geq 0}$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underline{u_n \geq 0} \quad \text{et de plus.}$$

$$u_n > 0 \quad x > 0$$

$$\boxed{\text{Si } x = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0}$$

Soit $x > 0$: Par d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

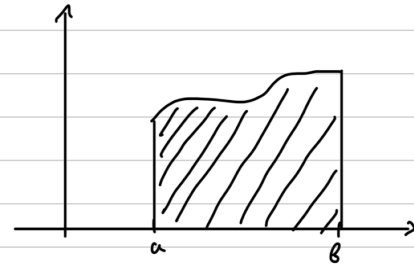
et $\sum u_n$ converge.

Pour aller plus loin, on introduit
des intégrales généralisées

Rappel: Le cadre standard pour les intégrales de Riemann.

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$



Thm (Newton): Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors il existe $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$ et si G est une autre fonction primitive de f sur $[a, b]$ alors $\exists c \in \mathbb{R}$ t.q. $G(x) = F(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$

On peut prendre $\forall x \in [a, b] \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Déf: Soit $f: [p, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive $p \in \mathbb{R}$.

On dit que l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} f(t) dt$ converge si la fonction $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$

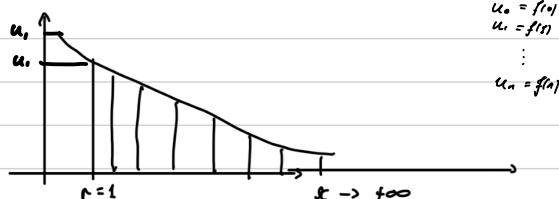
Si $f: [p, +\infty[$ est positive et continue, $F: [p, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante.

Par Chasle, si $x < y$,

$$F(y) = \int_p^y f(t) dt = F(x) + \int_x^y f(t) dt \geq F(x)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe toujours

$$\text{On pose: } \int_p^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$



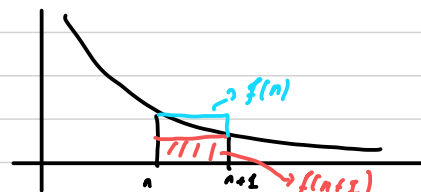
Critère (Comparaison avec l'intégrale)

Soit $f: [p, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue, positive, décroissante.

Alors $\int_p^{+\infty} f(t) dt$ et $\sum_{n=p}^{+\infty} f(n)$ sont de la même nature.

pv:

Posons $p=0$



$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(n) dt = f(n)$$

$$\int_0^n f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \dots + \int_{n-1}^n f(t) dt \leq f(0) + f(1) + \dots + f(n-1)$$

Si $\sum f(n)$ converge, alors $(\sum_{k=0}^n f(k))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée

D'où $(\int_0^n f(t) dt)$ est majorée,
alors $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

$$S_n = \sum_{k=0}^n f(k) = f(0) + \sum_{k=1}^n f(k) \leq f(0) + \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \\ = f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

$\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge $\Rightarrow (\int_0^n f(t) dt)$ est majorée d'où (S_n) converge

Séries de Riemann: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ $s \in \mathbb{R}$

1) Si $s \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{n^s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge

2) Si $s > 0$, on considère $f(x): [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x^s}$ f est continue, positive, décroissante.

Rq: $f \in C^1([1, +\infty[)$

$f'(x) = (x^{-s})' = -s \cdot x^{-s-1} = \frac{-s}{x^{s+1}} < 0$. Donc f est décroissante.
Par le critère, on étudie $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx$; Mo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^{+\infty}$ $s \neq 1$
 $\ln(x)$ $s = 1$

$$= \int \frac{x^{-s+1}-1}{1-s} dx \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ si } -s+1 < 0 \text{ (i.e. } \boxed{s > 1})$$

CCL: $\sum \frac{1}{n^s}$ converge si $\underline{s > 1}$.

Séries de Bertrand:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$$

converge si: $\alpha > 1$
ou: $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

1) Si $\alpha \leq 0$, la série diverge par le principe de comparaison
car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$

2) $\alpha > 0$ $g(x): [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue, positive et décroissante.

$g(x) \in \mathcal{C}^1([2, +\infty[)$ et $g'(x) < 0$. D'où $\int_2^{+\infty} g(x) dx$
et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ sont de même nature.

$$On \text{ étudie } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}} \text{ converge ssi } \alpha > 1$$

Terminologie: $\sum u_n$ s'appelle la série à terme général u_n :

$$\text{Ex: } \sum \frac{1}{n} \leftarrow \text{terme général } \frac{1}{n}$$

Encadrement du reste

Supposons que $\sum u_n$ à termes positifs converge.

$$\mathbb{R} \ni S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n \quad R_n \text{ s'appelle le reste de } \sum u_n$$

($\sum u_n$ est convergente) d'ordre γ

$$\text{est } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

$$Rq: \text{ Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0 \\ S = S_n + R_n$$

$S_n \leq S$ Supposons que nous avons une majoration.

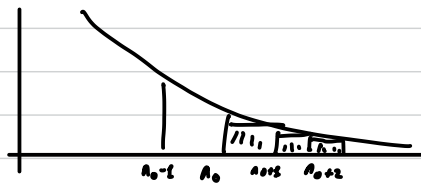
$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq R_n \leq \gamma_n$ où γ_n est une suite connue.

Nous avons donc un encadrement du reste.

$$0 \leq R_n \leq \gamma_n \Rightarrow S_n \leq S \leq S_n + \gamma_n$$

Exercice: Combien de terme doit-on prendre dans $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
pour connaître sa somme avec précision 10^{-3} .

On cherche n_0 tq $R_{n_0} < 10^{-3}$, $R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$



$$R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \int_{n_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n_0}$$

Pour faire $R_{n_0} < 10^{-3}$ il suffit de prendre $n_0 = 10^3$

Proposition (Encadrement du reste)

Soit $\sum u_n$, $u_n = f(n)$, $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continue, positive, décroissante.
convergente

$$\text{Alors } R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$$

Critère (thm de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Alors, $\sum u_n$ et $\sum 2^n \cdot u_{2^n}$ sont de même nature.

Application: $\sum \frac{1}{n^s}$ $s > 0$

Par Cauchy, on étudie $u_n = \frac{1}{n^s}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{ns-n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n; \text{ série géométrique de raison } \frac{1}{2^{s-1}} \text{ converge } \Leftrightarrow s > 1$$

Exercice: $\sum \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ quelle est nature?

Séries à termes quelconques

$$\sum u_n ; \quad \underline{u_n \in \mathbb{R}}$$

Def: On dit $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n| < +\infty$

Prop Si $\sum |u_n| < +\infty$ alors $\sum u_n$ converge.

pr: Soit $(u_n) \quad u_n \in \mathbb{R}$.

On introduit la partie positive de u_n ; $u_n^+ = \max(u_n, 0)$
et la partie négative $u_n^- = \max(-u_n, 0)$

$$|u_n| = u_n^+ + u_n^-$$

$$u_n = u_n^+ - u_n^-$$

On a supposé que $\sum |u_n| < +\infty$

$$\Leftrightarrow \sum u_n^+ + u_n^- < +\infty$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{\Leftrightarrow} \sum u_n^+ < +\infty \text{ et } \sum u_n^- < +\infty$$

$$\text{Par linéarité } \sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$$

converge

$$\text{Ex: } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad , \quad \alpha > 0$$

1) On vérifie la convergence absolue:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Critère de convergence pour les séries alternées

Déf: $\sum u_n$ est alternée si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n v_n$ ou $v_n \geq 0$
[Leibnitz]

Prop: Soit $\sum u_n$ une série alternée, i.e $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n v_n$
 $v_n \geq 0$, telle que:

- $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- $|u_n|$ est décroissante

Alors, $\sum u_n$ est convergente.

Preuve (Encadrement du reste par les séries alternées)

Soit $u_n = (-1)^n v_n$, $v_n \geq 0$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$

On suppose $v_n \rightarrow 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

Donc, $\sum u_n$ est convergente et $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}| \leq |u_n|$

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n \cdot v_n \text{ où } v_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

($\cdot$) $v_n \rightarrow 0$, ($\cdot$) (v_n) est décroissante

Donc par le critère, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge

Pr de critère

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ S_{2n+1} &= (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \dots + (u_{2n} + u_{2n+1}) \\ &\quad \underbrace{v_0 - v_1}_{\geq 0} \quad \underbrace{v_2 - v_3}_{\geq 0} \quad \dots \quad \underbrace{v_{2n} - v_{2n+1}}_{\geq 0} \end{aligned}$$

(S_{2n+1}) croissante

(S_{2n}) décroissante

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{On observe que } S_{2n+1} &= S_{2n} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1} \\ &= S_{2n} - v_{2n+1} \leq S_{2n} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_0$$

(S_{2n+1}) est majorée

(S_{2n}) est minorée par S_1