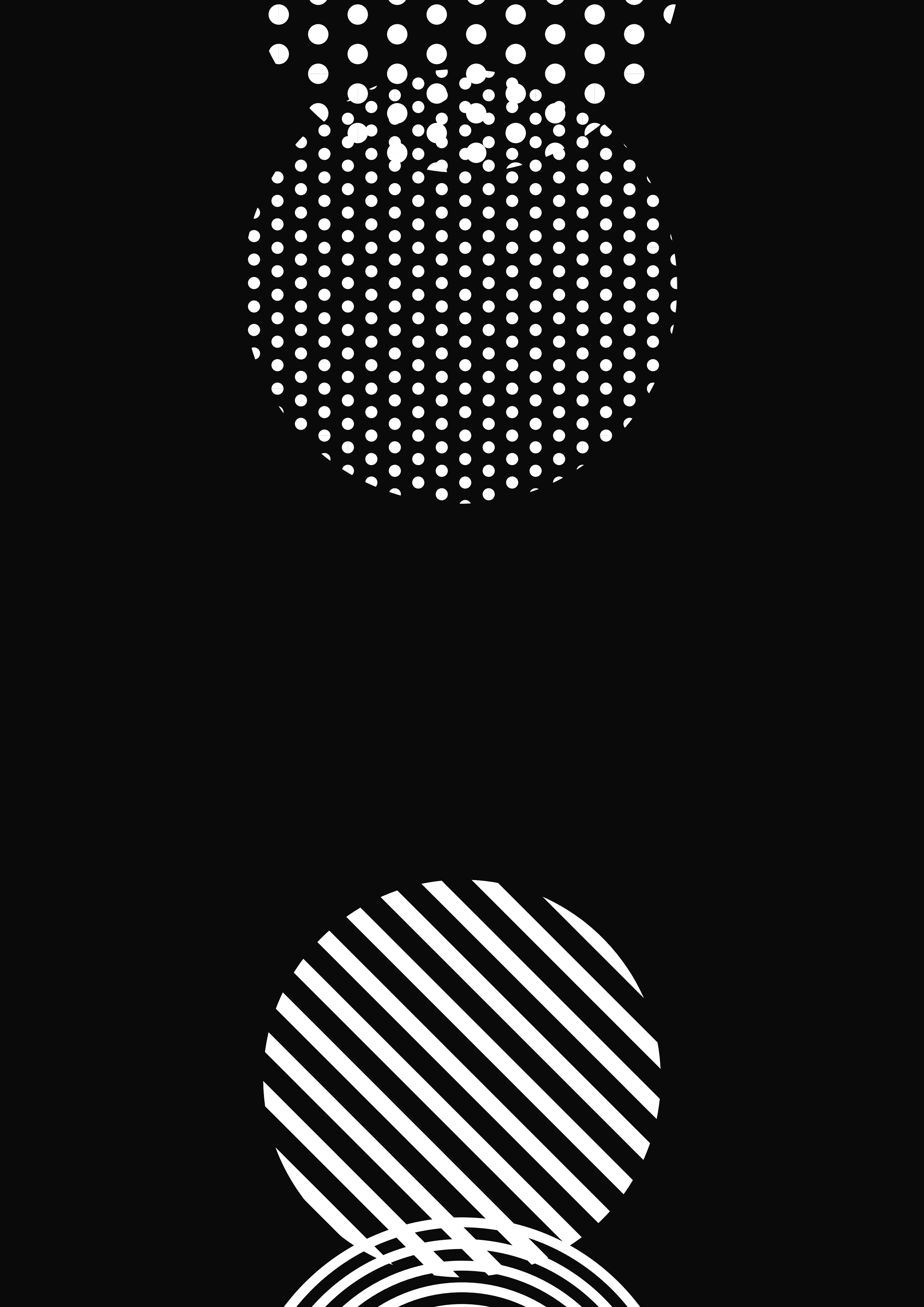


$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = +\infty$

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

↳ c'est quoi égalité?

pourquoi?

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots = \frac{1}{2}$

1) Séries numeriques

<u>Déf:</u> Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.
On appelle séries numerique une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sommes partielles. $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$.

On note la série (S_n) par $\sum u_n \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)$

On dit que la série $\sum u_n$ converge si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
Autrement dit, $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

Si la série $\sum u_n$ est convergente, on note sa limite $\underline{S}$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On a donné le sense à $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S$ si $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S$

<u>Ex:</u>

1) Paradoxe de Zenon (série géomètrique)

Déf: série géometrique: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ de raison $q \geq 0$

Les sommes partielles: $S_n = q^0 + q^1 + \dots + q^n$

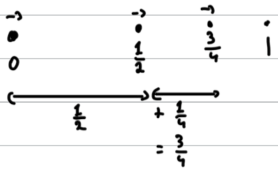
$\Leftrightarrow q \cdot S_n = q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$
$\Leftrightarrow S_n - qS_n = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$
$\Leftrightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q \neq 1$

↳ si $q = 1$

$S_n = \underbrace{1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n}_{n+1 \text{ fois}} = n+1$

Donc, $\sum q^n$ converge ssi $q < 1$.
On peut calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{n \to +\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$

Zenon:



Par la formule appliquée pour $q = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} = 2 - 1 = 1$$

2) Séries harmonique

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$; $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

La série harmonique, $\sum \frac{1}{n}$ converge-t-elle ?

$S_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$ d'où (S_n) est croissante.

__Rappel:__ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante est convergente ssi (S_n) est majorée.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-termes}}$$

$\geq \frac{1}{2n}$ $\frac{1}{2n}$ donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n\text{-fois}} = n \cdot \frac{1}{2n}$$

Critère de Cauchy

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0,\ \forall n,m \geq n_0,\ |S_n - S_m| \leq \varepsilon$

D'où, par le critère de Cauchy, (prenons $\varepsilon = \frac{1}{4}$) la suite $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, ne converge pas.

On peut aussi argumenter par l'absurde :
Supposons que $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0$

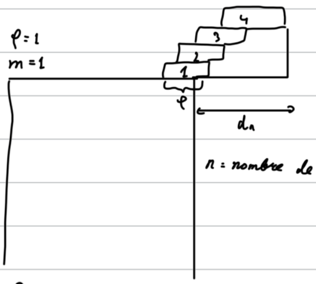
mais, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$0 \geq \frac{1}{2}$, contradiction

Ccl : La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$
Dans ce cas on écrit : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Problème mechanique :



Trouver d_n maximale

n = nombre de blocks Réponse : $d_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)$

Exercice :

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$
$h_n = n \cdot h$
$d_n = \frac{1}{2} \ln n$

Premières propriétés :

· (linéarité) Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergeantes
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergeante et sa somme
$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

·· oubli de premiers termes.
Soit p un entier positif
Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ sont de même nature
toutes. i.e les deux sont convergeantes ou toutes les deux sont divergeantes.

Pv : Regarder les sommes partielles (S_n) de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et (T_n) de $\sum_{n=p}^{+\infty} v_n$:

$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{p} u_k = \text{const}$

... Comportement du terme général

Soit $\sum u_n$ convergeante. Alors $\lim u_n = 0$

Pv: Soit $S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0$ $\boxed{M}$

En général, $\lim u_n = 0 \not\Rightarrow \sum u_n$ converge, contre-exemple

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ mais $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

En effet, $u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3) Séries téléscopiques :

Elles sont de la formes $\sum (a_n - a_{n+1})$ où (a_n) une suite.

Thm: La serie $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge ssi (a_n) converge
De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n \to +\infty} a_n$

Pv: $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1})$
$= a_0 - a_{n+1}$

$\lim S_n = a_0 - \lim a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ← série téléscopie

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

D'où, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim \frac{1}{n} = 1$