

Algèbre linéaire 2 (OLMA252)

Table des matières

1	Espaces vectoriels - Rappels de L1	1
1.1	Rappels sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	2
1.2	Espaces vectoriels	2
1.3	Sous-espaces vectoriels	4
1.4	Familles génératrices, familles libres, bases	6
1.5	Dimension et sommes directes	10
1.6	Applications linéaires	10
1.7	Noyau, image et rang	11
1.8	Opérations sur les applications linéaires	14
1.9	Matrices	15
1.10	Représentation matricielle d'une application linéaire	16
1.11	Changements de base	17
2	Éposé 1 : Espaces euclidiens	19
2.1	Produit scalaire	19
2.2	Orthogonalité	22
3	Éposé 2 : Bases orthonormales	24
3.1	Bases orthonormales	24
3.2	Projections orthogonales	27
3.3	L'algorithme de Gram-Schmidt	27

1 Espaces vectoriels - Rappels de L1

Ce chapitre contient des rappels du programme vu en L1 dans le cours Algèbre linéaire 1, qui constitue un pré-requis pour le cours d'Algèbre linéaire 2. Il ne sera pas étudié en cours.

1.1 Rappels sur les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Dans tout ce texte, la lettre K désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. L'ensemble K est donc muni d'une loi d'addition, notée $+$ et d'une loi de multiplication, notée parfois $\times$, mais le plus souvent par le symbole $\cdot$. Ces deux lois vérifient les propriétés suivantes :

- elles sont *associatives* : si $(a, b, c) \in K^3$, alors $a + (b + c) = (a + b) + c$ et $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Cela signifie que pour additionner trois nombres a , b et c , on peut commencer par additionner a et b , puis additionner $a+b$ et c ou alors commencer par additionner b et c puis additionner a et $b + c$, le résultat sera le même. On note donc ce résultat $a + b + c$ car, quelque soit la position des parenthèses, il ne change pas. De même on note $a \cdot b \cdot c$ pour $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- elles sont *commutatives* : si $(a, b) \in K^2$, alors $a + b = b + a$ et $a \cdot b = b \cdot a$.
- elles possèdent un *élément neutre*. L'élément neutre pour l'addition est l'élément 0 : pour tout $a \in K$, $a + 0 = 0 + a = a$. L'élément neutre pour la multiplication est l'élément 1 : pour tout $a \in K$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Attention l'élément neutre de l'addition diffère de l'élément neutre de la multiplication.
- la loi de multiplication est *distributive* par rapport à la loi d'addition, cela signifie que si $(a, b, c) \in K^3$, alors $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. Par commutativité, on a aussi $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$.
- tout élément de K , possède un *inverse* pour la loi d'addition. En effet si $a \in K$, alors $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Dans le cadre de la loi d'addition, l'inverse d'un élément est souvent appelé *opposé*.
- tout élément non nul de K possède un inverse pour la loi de multiplication. En effet si $a \in K^\times := K \setminus \{0\}$, alors $a \cdot (a^{-1}) = (a^{-1}) \cdot a = 1$. Il est nécessaire de supposer a non nul car l'élément 0 n'a pas d'inverse pour la loi de multiplication : pour tout $a \in K$, on a $a \cdot 0 = 0$, on ne peut donc pas trouver d'élément $b \in K$ tel que $a \cdot b = 1$.

Exemple 1.1. Lorsque $K = \mathbb{C}$, on a $i \cdot i = i^2 = -1$. Ainsi $(-i) \cdot i = (-1) \cdot i \cdot i = (-1)^2 = 1$, donc $-i$ est l'inverse de i pour la loi de multiplication dans $\mathbb{C}$.

1.2 Espaces vectoriels

Un K -espace vectoriel (ou tout simplement espace vectoriel quand le corps K est sous-entendu) est un ensemble E muni de deux lois de composition

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x. \end{array}$$

Ces deux lois doivent vérifier les propriétés suivantes

a) (i) La loi $+$ est *associative* :

$$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

(ii) Il existe un unique élément neutre $0 \in E$ pour la loi $+$:

$$\forall x \in E, \quad x + 0 = 0 + x = x.$$

(iii) Tout élément $x \in E$ possède un unique inverse $-x \in E$ pour la loi $+$:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

(iv) La loi $+$ est *commutative* :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x + y = y + x.$$

b) La loi $\cdot$ est distributive par rapport aux lois $+$ de E et K :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E, \quad \lambda \cdot (x + y) &= (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y) \\ \forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x &= (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x). \end{aligned}$$

c) La loi $\cdot$ est compatible à la multiplication dans K :

$$\forall (\lambda, \mu, x) \in K \times K \times E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x, \quad 1 \cdot x = x.$$

Dans la pratique, on écrit très souvent λx pour $\lambda \cdot x$.

Les éléments de l'ensemble E sont appelés *vecteurs* et les éléments du corps K sont appelés *scalaires*. Il faut bien prendre garde au fait que les lois $+$ et $\cdot$ sont définies sur des ensembles différents. La loi $+$ part de deux vecteurs et produit un vecteur alors que la loi $\cdot$ part d'un scalaire et d'un vecteur et produit un vecteur. Si λ est un scalaire et v un vecteur, il faut imaginer le vecteur $\lambda \cdot v$ comme étant le vecteur v dilaté au moyen du coefficient λ .

Exemple 1.2. (i) Soit E un K -espace vectoriel. Si $x \in E$, on a $0 \cdot x + 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x$. On en déduit $0 \cdot x = 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) D'après la loi de distributivité, pour $x \in E$, on a $x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$. Ainsi $(-1)x$ est l'inverse de x pour la loi de d'addition et on a donc $(-1)x = -x$.

Exemple 1.3. Si $n \geq 1$ est un entier, l'ensemble K^n des n -uplets d'éléments de K est un espace vectoriel pour les lois suivantes. Si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de K^n et $\lambda \in K$, on définit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Si $n = 1$, l'espace vectoriel K^n est juste le corps K et la loi $\cdot$ s'identifie alors à la loi de multiplication dans K .

Exemple 1.4. Notons $K^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de K . Il s'agit d'un K -espace vectoriel pour les opérations suivantes

$$(x_n)_{n \geq 0} + (y_n)_{n \geq 0} := (x_n + y_n)_{n \geq 0}, \quad \lambda \cdot (x_n)_{n \geq 0} := (\lambda x_n)_{n \geq 0}.$$

Exemple 1.5. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}, K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans K . Il s'agit d'un espace vectoriel, l'addition de deux fonctions est la loi d'addition usuelle sur les fonctions : si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, K)$, la fonction $f + g$ est la fonction prenant la valeur $f(x) + g(x)$ en x . De même on définit la multiplication d'une fonction f par un scalaire λ en définissant $\lambda \cdot f$ comme étant la fonction prenant la valeur $\lambda f(x)$ en x . On peut encore écrire ceci $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.6. Soit E un K -espace vectoriel. Un sous- K -espace vectoriel de E (ou simplement sous-espace vectoriel lorsque K est sous-entendu) est une partie F de E vérifiant

- (i) $0 \in F$;
- (ii) pour tous x et y dans F et λ dans K , on a $x + \lambda y \in F$.

Exemple 1.7. Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des éléments (x_1, x_2, x_3) vérifiant la relation $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ est un sous-espace vectoriel. Il s'agit d'un exemple de *sous-espace vectoriel défini par une équation*.

Exemple 1.8. Dans $\mathbb{R}^3$ posons $v = (1, 2, 3)$ et $w = (2, 7, 3)$. Alors l'ensemble

$$\{\lambda v + \mu w \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} = \{\lambda + 2\mu, 2\lambda + 7\mu, 3\lambda + 3\mu \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit d'un exemple de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, ici les vecteurs v et w .

On peut effectuer des opérations sur les sous-espaces vectoriels afin d'en produire de nouveaux.

Si E est un espace vectoriel et si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels, l'intersection $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E . L'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{v + w \mid (v, w) \in F_1 \times F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* des sous-espaces F_1 et F_2 . Plus généralement, si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels, la partie

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé *somme* de la famille de sous-espaces $(F_1, \dots, F_n)$.

Si $v \in E$, on note Kv l'ensemble $\{\lambda v \mid \lambda \in K\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé *droite vectorielle* engendrée par v . Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille d'éléments de E , le *sous-espace vectoriel engendré par* $(v_1, \dots, v_n)$ est noté $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ et définit par

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) := Kx_1 + \dots + Kx_n = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n\}.$$

Remarquons que dans l'exemple 1.8, le sous-espace vectoriel peut être défini comme $\text{Vect}(v, w)$.

Soit E un K -espace vectoriel, ainsi que F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Par définition, tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit sous la forme $v + w$ avec $v \in F_1$ et $w \in F_2$. Cette écriture n'est pas toujours unique. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^3$ avec $F_1 = \text{Vect}((1, 2, 3), (2, 1, 3))$ et $F_2 = \text{Vect}((2, 7, 3), (1, 8, 3))$. Alors on peut écrire

$$(3, 9, 6) = (1, 2, 3) + (2, 7, 3) = (2, 1, 3) + (1, 8, 3).$$

Cependant lorsque cette décomposition est unique, on dit que les sous-espaces F_1 et F_2 sont en *somme directe*. Plus généralement, on peut définir la notion de somme directe pour une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.9. Soit E un espace vectoriel. Si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on dit qu'ils sont en *somme directe* si tout élément $x \in F_1 + \dots + F_n$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = v_1 + \dots + v_n$ avec $v_i \in F_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Lorsque tel est le cas, on note également $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ le sous-espace vectoriel $F_1 + \dots + F_n$.

Pour vérifier que des sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on peut utiliser le critère suivant.

Proposition 1.10. Les sous-espaces $F_1 + \dots + F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$, l'égalité $v_1 + \dots + v_n = 0$ implique $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$.

Démonstration. Le sens $\Rightarrow$ est immédiat, il s'agit juste d'appliquer la définition d'une somme directe à la décomposition de l'élément 0. Montrons que si l'égalité $v_1 + \dots + v_n = 0$ implique $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$ pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$, alors les sous-espaces $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe. Il faut donc prouver que si $(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ et si $(w_1, \dots, w_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ vérifient

$$v_1 + \dots + v_n = w_1 + \dots + w_n, \tag{1}$$

alors $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$. Pour cela, réécrivons l'égalité (1) sous la forme

$$(v_1 - w_1) + (v_2 - w_2) + \dots + (v_n - w_n) = 0.$$

L'hypothèse implique alors $v_1 - w_1 = \dots = v_n - w_n = 0$, c'est-à-dire $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$. $\square$

Le cas de deux sous-espaces vectoriels est particulier.

Proposition 1.11. *Soit E un K -espace vectoriels et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Alors F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = 0$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que F_1 et F_2 sont en somme directe. Soit $v \in F_1 \cap F_2$. Alors $0 = v - v = 0 - 0$. Comme F_1 et F_2 sont en somme directe, une telle décomposition est unique, ainsi $v = 0$ et donc $F_1 \cap F_2 = 0$. Réciproquement supposons $F_1 \cap F_2 = 0$. Soit $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $v_1 + v_2 = 0$. On a alors $v_1 = -v_2 \in F_2$, donc $v_1 \in F_1 \cap F_2$ et donc $v_1 = 0$. On en déduit $v_2 = 0$. Ainsi la proposition 1.10 implique que F_1 et F_2 sont en somme directe. $\square$

Remarque 1.12. Attention, la proposition 1.11 ne se généralise pas verbatim au cas de n sous-espaces vectoriels avec $n \geq 3$. Considérons par exemple le cas de $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R}(1, 0)$, $F_2 = \mathbb{R}(0, 1)$ et $F_3 = \mathbb{R}(1, 1)$. On vérifie que $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_3 = F_1 \cap F_3 = 0$ (en particulier $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = 0$). Pourtant ces trois sous-espaces ne sont pas en somme directe puisque

$$(1, 1) = 0 + 0 + (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) + 0.$$

1.4 Familles génératrices, familles libres, bases

Soit E un espace vectoriel.

Définition 1.13. *On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E telle que $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Une telle famille est appelée famille génératrice de E .*

Exemple 1.14. Si $E = K^n$, pour $1 \leq i \leq n$, notons e_i l'élément $(0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0)$.

Tout élément $(x_1, \dots, x_n)$ de E peut s'écrire

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

donc $K^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ce qui montre que K^n est un espace vectoriel de dimension finie.

Dans l'exemple précédent, on a envie de dire que K^n est en fait de dimension n . Pour définir correctement la notion de dimension, il est nécessaire d'introduire les notions de familles libres et de bases.

Définition 1.15. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille finie d'éléments de E . On dit que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre si pour tout n -uplet de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, la seule combinaison linéaire nulle des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ est la combinaison dont les coefficients sont nuls.

Exemple 1.16. Si $E = K^n$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. En effet, supposons que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, alors

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 = (0, \dots, 0)$$

donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Définition 1.17. Une base de E est une famille finie d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $v \in E$. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ tels que $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. Comme de plus la famille $\mathcal{B}$ est libre, les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont uniquement déterminés par v . On les appelle les *coordonnées* de v dans la base $\mathcal{B}$. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Proposition 1.18. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $v \in E$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Exemple 1.19. Si $E = \mathbb{R}^n$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la famille des vecteurs élémentaires (voir exemple 1.14). Il s'agit d'une famille génératrice et libre, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$. Si $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

donc les scalaires $x_1, \dots, x_n$ sont les coordonnées du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Pour cette raison, on lui donne le nom de *base canonique* de $\mathbb{R}^n$. Mais attention, il existe bien d'autres bases dans $\mathbb{R}^n$! (voir les feuilles d'exercices)

Exemple 1.20. Soit $n \geq 0$ et soit $K[X]$ l'ensemble des applications polynômes de K dans K , c'est-à-dire des applications de K dans K de la forme $x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel du K -espace vectoriel $\mathcal{F}(K, K)$. Si $n \geq 0$, on note $K_n[X]$ le sous-espace des applications polynômes de degré inférieur ou égal à n . Si on note X^i l'application polynôme $x \mapsto x^i$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$.

Le corollaire suivant est une reformulation de la proposition [1.18](#)

Corollaire 1.21. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors l'application

$$\begin{aligned} K^n &\longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

est une bijection.

Le théorème qui va suivre est très utile pour construire des bases.

Théorème 1.22. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une famille libre de E et soit $\mathcal{B}_2 = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_s)$ une famille génératrice de E telle que $s \geq r$. Alors il existe un entier $0 \leq k \leq s - r$ et des entiers $i_1 < \dots < i_k$ compris entre $r + 1$ et s tels que la famille $(e_1, \dots, e_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ soit une base de E . En d'autres termes, d'une famille génératrice, on peut toujours extraire une base contenant une sous-famille libre donnée.

Corollaire 1.23. Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute famille génératrice contient une sous-famille qui est une base.

Démonstration. On peut supposer $E \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E . Comme cette famille est génératrice, elle contient au moins un élément non nul. Quitte à permuter les éléments de cette famille on peut supposer que $e_1 \neq 0$. La famille réduite à e_1 est alors libre. Le théorème [1.22](#) implique alors qu'il existe une sous-famille de $\mathcal{B}$ qui est une base de E . $\square$

Corollaire 1.24. Dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut toujours compléter une famille libre en une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$ une famille libre de E . Comme E est de dimension finie, il possède une famille génératrice $(f_1, \dots, f_s)$. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ est alors aussi une famille génératrice et on peut appliquer le théorème [1.22](#) pour prouver qu'il existe une sous-famille de $\mathcal{B}'$ qui est une base et qui complète $\mathcal{B}$. $\square$

Théorème 1.25. *Tout K -espace vectoriel E de dimension finie possède une base. De plus toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.*

Démonstration. L'existence d'une base est une conséquence immédiate du corollaire 1.23 puisque un espace vectoriel de dimension finie contient au moins une famille génératrice. La démonstration du fait que toutes les bases ont le même nombre d'éléments est plus délicate. Nous allons la décomposer en plusieurs étapes.

Lemme 1.26. *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E . Soit $v \in E$ et supposons que $v \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. Alors il existe $r + 1 \leq i \leq n$ tel que $(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E .*

Démonstration. Comme la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Comme $v \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, il existe $r + 1 \leq i \leq n$ tel que $\lambda_i \neq 0$. On peut alors écrire

$$e_i = \lambda_i^{-1}(v - \lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_{i-1} e_{i-1} - \lambda_{i+1} e_{i+1} - \dots - \lambda_n e_n).$$

Ainsi $e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$. En conséquence $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ et donc la famille $(e_1, \dots, e_{i-1}, v, e_{i+1}, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E . $\square$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et soit $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ deux bases de E . Supposons par l'absurde que $m > n$. En appliquant le lemme 1.26, on construit une famille génératrice de E à n termes dont le premier terme est f_1 et les vecteurs suivants proviennent de $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}'$ est une base, la famille (f_1, f_2) est libre donc $f_2 \notin \text{Vect}(f_1)$. Le lemme 1.26 permet alors de construire une famille génératrice à n termes dont les deux premiers termes sont f_1, f_2 et les suivants des vecteurs de $\mathcal{B}$. En itérant ce procédé, on obtient une famille génératrice à n termes constituée des vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$. Mais alors $f_{n+1} \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, ce qui contredit la liberté de la famille $\mathcal{B}'$. $\square$

Si E est un K -espace vectoriel de dimension finie. La longueur d'une base de E est appelée *dimension* de E . On la note $\dim_K E$.

Exemple 1.27. L'exemple 1.19 montre que la famille des vecteurs élémentaires $e_1, \dots, e_n$ est une base de K^n , on en conclut que $\dim_K K^n = n$.

Exemple 1.28. Dans l'exemple 1.20, on a vu que la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base du K -espace vectoriel $K_n[X]$. On en conclut que $\dim_K K_n[X] = n + 1$.

Corollaire 1.29. *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E , alors $n \leq \dim_K E$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1.24, on peut compléter la famille $(e_1, \dots, e_n)$ en une base de E . Le théorème 1.25 implique alors que $\dim_K E \geq n$. $\square$

Corollaire 1.30. *Dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille constituée de m vecteurs avec $m > n$ est liée.*

Démonstration. Il s'agit d'une reformulation du corollaire 1.29. $\square$

Corollaire 1.31. *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et $\dim_K F \leq \dim_K E$. De plus on a $\dim_K F = \dim_K E$ si et seulement si $F = E$.*

Corollaire 1.32. *Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E .*

- (i) *Supposons $\mathcal{B}$ libre. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si $n = \dim_K E$.*
- (ii) *Supposons $\mathcal{B}$ génératrice. Alors $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si $n = \dim_K E$.*

1.5 Dimension et sommes directes

Proposition 1.33. *Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Si F et G sont de dimension finie, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont de dimension finie et on a*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Proposition 1.34. *Soit $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Si ces sous-espaces sont en somme directe, alors pour toute base $\mathcal{B}_1$ de F_1 , $\mathcal{B}_2$ de $F_2, \dots, \mathcal{B}_n$ de F_n , la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$ est une famille libre de E . Si de plus $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = E$, alors $\mathcal{B}$ est une base de E .*

Proposition 1.35. *Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Ces sous-espaces sont en somme directe si et seulement si*

$$\dim(F_1 + \dots + F_n) = \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

1.6 Applications linéaires

Définition 1.36. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application linéaire de E dans F est une application f de E dans F telle que*

$$\forall (\lambda, x, y) \in K \times E \times E, \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Lorsque $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Un élément de $\mathcal{L}(E)$ est appelé *endomorphisme* de E .

Exemple 1.37. (i) L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, y + 2x)$ est linéaire.

(ii) Plus généralement, étant donnés des nombres réels $a_1, \dots, a_n$, l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ est linéaire.

(iii) Encore plus généralement, une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)).$$

Chaque f_i est une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et s'appelle la *i-ème application coordonnée* de f . On vérifie facilement que f est linéaire si et seulement si toutes ses applications coordonnées f_i sont linéaires.

1.7 Noyau, image et rang

Définition 1.38. Si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est une application linéaire de E dans F , on note $\text{Im } f$ l'image $f(E)$ de f et $\text{Ker } f$ le noyau de f , c'est-à-dire l'ensemble $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E, f(x) = 0\}$.

On vérifiera à titre d'exercice que $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

Proposition 1.39. Si f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, alors f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = 0$.

Démonstration. Si f est injective, alors $\text{Ker } f$ est réduit à 0. Réciproquement supposons que $\text{Ker } f = \{0\}$. Si x et y sont deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x) - f(y) = 0$. Par linéarité de f , on a alors $f(x - y) = 0$ et donc $x - y \in \text{Ker } f$. Ainsi on doit avoir $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. On a prouvé que l'application f est injective. $\square$

La dimension de l'espace vectoriel $\text{Im } f$ est appelé le *rang* de f et est notée $\text{rg } f$. Ainsi on a, par définition, $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$.

Théorème 1.40 (Théorème du rang). Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un espace vectoriel. Si f est une application linéaire de E dans F , alors $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F et on a

$$\dim \text{Im } f = \dim E - \dim \text{Ker } f.$$

Démonstration. L'espace vectoriel E est de dimension finie. D'après le théorème 1.25 il possède au moins une base. Soit donc $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Nous allons montrer que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$. Tout d'abord, on a bien $f(e_i) \in \text{Im } f$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Soit $w \in \text{Im } f$. Par définition de $\text{Im } f$, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E , il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. L'application f étant linéaire, on a

$$w = f(v) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n).$$

Ainsi w est combinaison linéaire des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$. Ceci étant vrai pour tout choix de $w \in \text{Im } f$, la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$. On en conclut donc que $\text{Im } f$ est un espace vectoriel de dimension finie.

D'après le corollaire 1.23, on peut extraire de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ une base de $\text{Im } f$. Soit $r := \dim_K \text{Im } f$. Il existe donc des indices $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ tels que $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une base de $\text{Im } f$. Comme r est le rang de f , il nous reste donc à démontrer que

$$n = \dim_K E = r + \dim_K \text{Ker } f.$$

Soit $W := \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_{i_1}, \dots, e_{i_r}$. Montrons que la famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est libre. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que

$$\lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_r e_{i_r} = 0.$$

Alors, par linéarité de f , on a

$$\lambda_1 f(e_{i_1}) + \dots + \lambda_r f(e_{i_r}) = f(\lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_r e_{i_r}) = f(0) = 0.$$

En utilisant le fait que $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une famille libre de F , on en conclut que $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = (0, \dots, 0)$ et donc que $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est une famille libre de E . Comme par ailleurs, $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ est, par définition de W , une famille génératrice de W , il s'agit en fait d'une base de W et donc $\dim_K W = r$.

Nous allons à présent montrer que $E = \text{Ker } f \oplus W$. Commençons par vérifier que $\text{Ker } f$ et W sont en somme directe. Soit $v \in \text{Ker } f \cap W$. D'une part $v \in W$, donc il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que $v = \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_r e_{i_r}$. D'autre part, $v \in \text{Ker } f$, donc $f(v) = 0$. Ceci nous donne

$$\lambda_1 f(e_{i_1}) + \dots + \lambda_r f(e_{i_r}) = 0.$$

Comme $(f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_r}))$ est une famille libre, on en conclut que $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = (0, \dots, 0)$ et donc que $v = 0$. Ainsi, d'après la proposition 1.11, les sous-espaces

$\text{Ker } f$ et W sont en somme directe. Il reste donc à prouver que $E = \text{Ker } f + W$. Soit $v \in E$ un vecteur de E . Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ tel que

$$f(v) = \lambda_1 f(e_{i_1}) + \dots + \lambda_r f(e_{i_r}).$$

Posons alors $w := \lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_r e_{i_r}$. On a $w \in W$. De plus $f(v - w) = 0$, donc $v - w \in \text{Ker } f$. On a donc bien décomposé $v = (v - w) + w$ prouvant que $E = \text{Ker } f + W$.

On conclut donc de la proposition [1.35](#) que $\dim_K E = \dim_K \text{Ker } f + \dim_K W$. □

Exemple 1.41. (i) Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 2x + y).$$

Déterminons son noyau. Un élément $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dans le noyau de f si et seulement si il est solution du système d'équations linéaires homogène

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ainsi $\text{Ker } f = 0$ et l'application f est injective. Le théorème du rang (théorème [1.40](#)) nous donne alors $\text{rg } f = 2$. Ainsi $\dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^2$, ce qui implique $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ d'après le corollaire [1.31](#). L'application f est donc surjective. Étant injective et surjective, elle est bijective.

(ii) Considérons à présent l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y + z, y + z).$$

Déterminons son noyau. Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Le noyau de f est donc le sous-espace vectoriel constitué des vecteurs de la forme $(0, y, -y)$, c'est-à-dire la droite vectoriel $\mathbb{R}(0, 1, -1)$. Ainsi $\dim \text{Ker } f = 1$. Le théorème du rang implique alors que $\dim \text{Im } f = 2$. Cette fois-ci, on a $\text{Im } f \subsetneq \mathbb{R}^3$, l'application f n'est ni injective ni surjective.

1.8 Opérations sur les applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F , on note $f + g$ l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Il s'agit d'une application linéaire de E dans F . De même si $\lambda \in K$, on note $\lambda \cdot f$ l'application de E dans F définie par

$$\forall x \in E, (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Il s'agit encore d'une application linéaire de E dans F . Muni des opérations $+$ et $\cdot$ définies ci-dessus, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.

Si E , F et G sont trois espaces vectoriels, et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, l'application composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G .

Théorème 1.42. *Soient E et F deux espaces vectoriels. Supposons que E est de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour toute famille $(f_1, \dots, f_n)$ de $n = \dim_K E$ éléments de F , il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $u(e_i) = f_i$. Si de plus la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, l'application u est injective. Si de plus la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F , l'application u est bijective.*

Démonstration. Soit $v \in E$ et soit $(x_1, \dots, x_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$. On pose alors

$$u(v) := x_1 f_1 + \dots + x_n f_n.$$

On obtient ainsi une application u de E dans F . On vérifie facilement qu'elle est linéaire. Elle vérifie également la propriété $u(e_i) = f_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Vérifions que c'est la seule application linéaire ayant cette propriété. Supposons en effet que u' soit une application linéaire de E dans F tel que $u'(e_i) = f_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Si $v \in E$ et si $(x_1, \dots, x_n)$ est le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$u'(v) = u'(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 u'(e_1) + \dots + x_n u'(e_n) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = u(v).$$

Comme $u'(v) = u(v)$ pour tout $v \in E$, on a bien $u' = u$. Ceci prouve l'unicité de u .

Le reste est laissé en exercice. □

1.9 Matrices

Définition 1.43. Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ deux entiers. Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans K est un tableau rectangulaire A ayant n lignes et p colonnes contenant des éléments de A . On note $a_{i,j}$ ses coefficients et on les indexe de la façon suivante

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. C'est un K -espace vectoriel pour les opérations suivantes

- $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors $C = A + B$ où $C = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.
- $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, \lambda \in K$, alors $\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Le K -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de dimension finie. Une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est donnée par la famille de matrices $E_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. La matrice $E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les entrées sont nulles sauf l'entrée à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1. On en déduit que

$$\dim_K \mathcal{M}_{n,p}(K) = np.$$

Si $n = p$, une matrice de $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est appelée *matrice carrée* de taille n .

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, on définit le *produit* de A avec B par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$$

où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$.

Proposition 1.44. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$, on a

- $A(BC) = (AB)C$;
- $A(B + C) = (AB) + (AC)$;
- $(A + B)C = (AC) + (BC)$;
- si $\lambda \in K$, on a $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Pour $n \geq 1$, on identifie l'espace vectoriel K^n à l'espace des matrices $\mathcal{M}_{n,1}(K)$

via l'opération $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Si $n \geq 1$, on note I_n la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{i,j} = 1$ si $i = j$. On l'appelle la *matrice identité*.

Définition 1.45. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on appelle transposée de A et on note tA la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par

$${}^tA = (a_{j,i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

On a alors ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Définition 1.46. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$. Si elle existe, la matrice B est unique et est appelée inverse de A . On la note alors A^{-1} .

On note $\mathrm{GL}_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$. Si A et B sont dans $\mathrm{GL}_n(K)$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.10 Représentation matricielle d'une application linéaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie. On fixe $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F . Pour $1 \leq j \leq p$, on note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$. Autrement dit

$$u(e_j) = a_{1,j}f_1 + \dots + a_{n,j}f_n.$$

La matrice de taille $n \times p$ de termes $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est appelée *matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$* . On la note $\mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(u)$ ou encore $\mathrm{Mat}(u; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$. Si $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E)}(u)$.

Soit $v \in E$. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_E$, on note $X_{\mathcal{B}_E}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_E$.

La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ a alors la propriété suivante :

$$X_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(u)X_{\mathcal{B}_E}(v).$$

Proposition 1.47. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soit $\mathcal{B}_E$ une base de E et soit $\mathcal{B}_F$ une base de F . Alors l'application de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par $u \mapsto \mathrm{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(u)$ est linéaire et bijective.

Proposition 1.48. Soient E , F et G trois espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = q$, $\dim F = p$ et $\dim G = n$. Soient $\mathcal{B}_E$ une base de E , $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G . Alors si $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\text{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G)}(u \circ v) = \text{Mat}_{(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)}(u) \text{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(v).$$

1.11 Changements de base

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n . Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . La *matrice de passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée de taille n dont la j -ème colonne est donnée par les coordonnées du j -ème vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, et que

$$\forall 1 \leq j \leq n, e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i,$$

alors

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Si $v \in E$, on a alors

$$X_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}(v).$$

En effet, soit $(x_1, \dots, x_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ le système de coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$.

Comme $e'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$, on en conclut

$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x'_j \right) e_i.$$

Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on a bien

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x'_j$$

c'est-à-dire $X_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}(v)$.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E , on a alors

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''}.$$

De plus, $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}} = I_n$ de sorte que la matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ est toujours inversible et que

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}.$$

Proposition 1.49. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a*

$$\text{Mat}_{(\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)}(f) = P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F}^{-1} \text{Mat}_{(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)}(f) P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}.$$

En particulier, si $E = F$, $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}'_F$, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(f) = P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}.$$

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices du même endomorphisme de K^n dans des bases différentes.

2 Exposé 1 : Espaces euclidiens

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont *réels*. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2.1 Produit scalaire

Définition 2.1. Une forme bilinéaire sur E est une application

$$b : \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & b(x, y) \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z), \quad b(x, y + \lambda z) = b(x, y) + \lambda b(x, z).$$

La forme bilinéaire b est dite

- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, b(y, x) = b(x, y)$;
- positive si $\forall x \in E, b(x, x) \geq 0$;
- définie si $b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E .

Remarque 2.2. On a $b(0, x) = b(0 + 1 \cdot 0, x) = b(0, x) + 1 \cdot b(0, x) = b(0, x) + b(0, x)$, donc $b(0, x) = 0 \forall x \in E$. Similairement, $b(x, 0) = 0 \forall x \in E$.

Pour un produit scalaire on utilise souvent la notation :

$$\langle u, v \rangle$$

pour $u, v \in E$.

Exemple 2.3. (i) Si $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique sur E est la forme

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = {}^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(ii) Si $E = \mathbb{R}^2$, alors $\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ différent du produit scalaire canonique.

⚠ Un espace vectoriel non-nul possède une infinité de produits scalaires différents !

- (iii) Si $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continu}\}$, $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .
- (iv) Si $E = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle := \text{Tr}(^tAB)$ définit un produit scalaire sur E .

Définition 2.4. Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

Définition 2.5. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. La norme euclidienne d'un élément $x \in E$ pour ce produit scalaire est définie par $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$\|x\|$ est bien défini car $\langle x, x \rangle \geq 0$ (un produit scalaire est positif).

Lemme 2.6. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Soient x et y deux vecteurs de E . Alors on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus on a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires, i.e., $\exists t \in \mathbb{R}$ avec $u = tv$ ou $v = tu$.

Démonstration. — Si $v = 0$, on obtient $0 = 0$.

— Si $v \neq 0$: on considère $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \langle u + tv, u + tv \rangle = \langle u, u \rangle + t\langle u, v \rangle + t\langle v, u \rangle + t^2\langle v, v \rangle,$$

(car $\langle, \rangle$ est bilinéaire)

$$= \|u\|^2 + 2t\langle u, v \rangle + t^2\|v\|^2 =: f(t)$$

(car $\langle, \rangle$ est symétrique). Car $\|v\| \neq 0$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ est une fonction polynomiale. $f(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Donc, $f(t)$ n'a pas deux zéros différents, et son discriminant $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2$ est ≤ 0 . Donc, on obtient l'inégalité.

— Cas de l'égalité : on a alors que $\Delta = 0$. Donc, $\exists t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$. Donc, $\|u + tv\|^2 = \langle u + tv, u + tv \rangle = 0$, Donc $u + tv = 0 \Leftrightarrow u = -tv$ car $\langle, \rangle$ est défini. Donc, u, v sont colinéaires. L'égalité est facile de voir si u, v sont colinéaires.

□

La définition suivante sera étudiée dans le cours d'Analyse :

Définition 2.7. Soit E un espace vectoriel. On dit que $N: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une norme si

$$(i) \quad N(\lambda u) = |\lambda|N(u), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E,$$

(ii) $N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$

(iii) $N(u + v) \leq N(u) + N(v), \forall u, v \in E$ (Inégalité triangulaire).

Lemme 2.8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. La norme euclidienne $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est une norm.

Démonstration. — 1., 2. de 2.7 sont faciles.

— 3. : $\|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$
en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz 2.6

□

Proposition 2.9. On a les identités suivantes : $\forall u, v \in E$

(i) Identité du parallélogramme : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

(ii) Identité de polarisation : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$

Démonstration.

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad (2)$$

et

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad (3)$$

Donc, (2)+(3) donne :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

d'où 1). Pour 2), on considère (2)-(3) :

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2\langle u, v \rangle - (-2\langle u, v \rangle) = 4\langle u, v \rangle.$$

□

Exercice 2.1. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. On veut borné $x + 2y + 3z$.

Solution : Posons $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors, $1 = x^2 + y^2 + z^2 = \|u\|^2$ et $x + 2y + 3z =$

$\langle u, v \rangle$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Après Cauchy-Schwarz 2.6 :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

De plus, on a égalité si (u, v) est liée.

2.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$.

- Définition 2.10.** (i) On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.
- (ii) Deux sous-ensemble A, B de E sont orthogonaux si $\forall u \in A, \forall v \in B, \langle u, v \rangle = 0$.
- (iii) Si $A \subseteq E$ est un sous-ensemble, on appelle orthogonal de A , noté $A^\perp$, l'ensemble

$$A^\perp := \{u \in E \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall v \in A\}.$$

- Proposition 2.11.** (i) Si $A \subseteq E$, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (ii) Si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
- (iii) $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ où $\text{Vect}(A)$ est le sous-espace vectoriel engendré par le sous-ensemble A .
- (iv) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ (**▲** : Pas égalité en général, par exemple si A n'est pas un sous-espace vectoriel)

Démonstration. Exercices. □

Exemple 2.12. 1) $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}), \langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Alors, $f(t) := \cos(t), g(t) := \sin(t)$ sont orthogonaux :

$$\int_{-1}^1 \cos(t) \sin(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2t) dt = 0$$

car $\sin$ est impaire, i.e., $\sin(-t) = -\sin(t)$. On a utilisé la formule trigonométrique : $2 \cos(t) \sin(t) = \sin(2t)$.

- 2) $E = \mathbb{R}^n, \langle, \rangle$ le produit scalaire canonique. Soit $H \subseteq \mathbb{R}^n$ l'hyperplan $H := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + \dots + x_n = 0 \right\}$ Alors : $H = \text{Vect}(u)^\perp$ où $u := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H^\perp = \text{Vect}(u)$.

Définition 2.13. Si E est un espace euclidien, on appelle "dual de E " l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}) := \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est linéaire}\}.$$

On le note E^* . Un élément $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ s'appelle une forme linéaire.

Rappels : Soient F, F' deux espaces vectoriels de dimension finie. Grâce à [1.47](#) l'espace vectoriel $\mathcal{L}(F, F')$ des applications linéaires $F \rightarrow F'$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n := \dim F, m := \dim F'$.

Donc, $\dim \mathcal{L}(F, F') = n \times m$. En particulier, $\dim E^* = \dim E$.

Si $f: F \rightarrow F'$ est linéaire, alors

$$\dim F = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$$

par le théorème du rang [1.40](#)

Proposition 2.14. *Si F, F' sont deux espaces vectoriels de dimension finie tel que $\dim F = \dim F'$ et $f \in \mathcal{L}(F, F')$, alors :*

$$f \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}.$$

Démonstration. On rappelle que si G, G' sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un même espace vectoriel, alors $G = G'$ si et seulement si $G \subseteq G'$ et $\dim G = \dim G'$ (p.e., on peut prolonger une base de G à une base de G' et utiliser que la longueur d'une base d'un espace vectoriel est indépendante de la base).

- “ $\Rightarrow$ ” f est injective, donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ ([1.39](#)).
- “ $\Leftarrow$ ” Supposé $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Alors, $\dim \text{Ker}(f) = 0$ et par le thm du rang [1.40](#) on a : $\dim F = \dim \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f) = F'$ (applique l'affirmation avant avec $G := \text{Im}(f) \subseteq G' := F'$). Donc, f est surjective.

□

Lemme 2.15. *Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $f \in E^*$ une forme linéaire sur E . Alors, $\exists! u \in E$ tel que*

$$f(x) = \langle u, x \rangle, \forall x \in E,$$

c'est-à-dire la forme linéaire f est donnée par un produit scalaire.

Notation : pour tout $v \in E$, on note f_v l'application :

$$f_v: E \rightarrow \mathbb{R}, x \in \langle v, x \rangle.$$

Donc, $f_v \in E^*$ est une forme linéaire $\forall v \in E$, car $\langle, \rangle$ est linéaire dans le deuxième argument.

Démonstration du lemme de Riesz. On considère l'application $\varphi: E \rightarrow E^*$. On vérifie que φ est linéaire (en utilisant que $\langle, \rangle$ est linéaire dans le premier argument).

- L'application φ est injective : $u \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow f_u(x) = 0 \forall x \in E$. En particulier, pour $x = u$, on a $0 = f_u(u) = \langle u, u \rangle$. Donc, $u = 0$ car $\langle, \rangle$ est définie.

- On a alors $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(E^*)$. Après [2.14](#) on conclut que φ est bijective, i.e., $\forall f \in E^* \exists ! u \in E$ tel que $f = f_u$.

□

Exemple 2.16. Soit $E = \mathbb{R}^n$, $\langle, \rangle$ le produit scalaire canonique. Ici, le lemme de Riesz est simple à comprendre : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors, si on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n.$$

Donc,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

où $u_i := f(e_i)$. Donc, f est le produit scalaire par $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$.

3 Exposé 2 : Bases orthonormales

3.1 Bases orthonormales

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $F \leq E$ un sous-espace vectoriel de E (automatiquement $\dim F < \infty$ car $\dim E < \infty$).

Rappel [2.10](#) : $F^\perp := \{x \in E \mid \langle x, z \rangle = 0 \forall z \in F\}$, le orthogonal de F .

Théorème 3.1. On a $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration. On doit montrer que (1) : $F \cap F^\perp = \{0\}$, et (2) : $E = F + F^\perp$, i.e., $\forall x \in E, \exists x' \in F, x'' \in F^\perp$ tel que $x = x' + x''$.

- (1) Soit $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x, z \rangle = 0, \forall z \in F$. Car $x \in F$ donc $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.
- (2) Soit $x \in E$. Considérons $f_x \in E^*$, l'application $f_x : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y \rangle$, et $f := f_x|_F$ sa restriction à F . Donc $f \in F^*$. Alors, par le lemme de Riez [2.15](#) $\exists ! x' \in F$ tel que $f = f_{x'}$. Alors, $f_x(z) = f_{x'}(z) \forall z \in F$ (**▲** pas forcément $\forall y \in E$!). Posons $x'' := x - x'$, de sorte à écrire $x = x' + x''$. Montrons $x'' \in F^\perp$. Alors, si $z \in F$,

$$\langle x'', z \rangle = \langle x - x', z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle x', z \rangle = f_x(z) - f_{x'}(z) = 0.$$

Donc, $x'' \in F^\perp$ et on a bien $E = F \oplus F^\perp$.

— $F \subseteq (F^\perp)^\perp$ (par 2.11). Car $E \cong F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$ (remplace F par $F^\perp$)

$$\dim F = \dim E - \dim F^\perp = \dim E - (\dim E - \dim(F^\perp)^\perp) = \dim(F^\perp)^\perp,$$

donc $F = (F^\perp)^\perp$. □

Définition 3.2. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$.

- Une famille $(v_i)_{i \geq 0}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si, pour $i \neq j$, on a $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, i.e., $v_i \perp v_j$.
- Une famille orthonormale de E est une famille orthogonale $(v_i)_{i \geq 0}$ telle que de plus $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \geq 0$.

Exemple 3.3. 1) $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale car

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

2) Dans $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$, la famille $(\cos(t), \sin(t))$ est orthogonale (2.12). La famille $(1, t^2)$ n'est pas orthogonale : $\langle 1, t^2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0$

Proposition 3.4. Une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre. En particulier, une famille orthonormale est libre.

Démonstration. Supposons $(v_1, \dots, v_n)$ orthogonale avec $v_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Si $\sum_{j=1}^n \underbrace{\alpha_j}_{\in \mathbb{R}} v_j = 0$, alors $\forall i = 1, \dots, n$

$$0 = \langle v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2.$$

On a $v_i \neq 0 \Rightarrow \|v_i\|^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$. Si $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale, alors $\|v_i\| = 1$, donc $v_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. □

Définition 3.5. Si $(E, \langle, \rangle)$ est un espace euclidien une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale (où BON) si elle est une base et une famille orthonormale.

Théorème 3.6. Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Alors, il admet une BON.

Démonstration. Soit $n := \dim E$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthogonale maximale (du point de vue du cardinal p), tel que $e_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, p$. Supposons, par l'absurde que $p < n$: Posons $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors, $E = V \oplus V^\perp$ (3.1) et $\dim V \leq p < n$. Donc, $V^\perp \neq \{0\}$. Soit $x \in V^\perp, x \neq 0$. Alors, $(e_1, \dots, e_p, x)$ est une famille orthogonale de cardinal $> p$. Donc, $p = n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base (car libre de cardinal $\dim E$). Pour avoir une famille orthonormale $(e'_1, \dots, e'_n)$, il suffit de prendre $e'_i := \frac{1}{\|e_i\|} e_i \forall i = 1, \dots, n$. $\square$

Proposition 3.7. Soit E un espace euclidien et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Si $x \in E$, on a

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit le réel $\langle x, e_i \rangle$ est la i -ème coordonnée de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration. Posons $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Alors, $\forall j = 1, \dots, n$

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0.$$

Donc, $x - y \in \text{Vect}(e_j, 1 \leq j \leq n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Donc, $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. $\square$

Corollaire 3.8. $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$.

Démonstration. Si $x = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\in \mathbb{R}} e_i, x = \langle x, e_i \rangle$ et

$$\|x\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$\square$

Proposition 3.9. Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien, et $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ une BON. Soient $f \in \mathcal{L}(E, E)$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice représentative de f dans $\mathcal{A}$, i.e., $A = \text{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$. Alors,

$$a_{ij} = \langle f(e_i), e_j \rangle, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Démonstration. A est la matrice dont les colonnes sont les vecteur $f(e_j)$ écrits dans la base $\mathcal{E}$: $A = (c_1 | \dots | c_n), c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, f(e_j) = a_{1n}e_1 + \dots + a_{nj}e_n$. Par la proposition 3.7 ci-dessus, $a_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle$. $\square$

3.2 Projections orthogonales

Soit E un espace euclidien et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Après le théorème ci-dessus 3.1 $E = F \oplus F^\perp$ et $\forall x \in E$ se décompose uniquement en :

$$x = \underset{\in F}{x_F} + \underset{\in F^\perp}{x_{F^\perp}}.$$

Définition 3.10. La projection orthogonale de E dans F est la projection p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$, i.e., $p_F: E = F \oplus F^\perp \rightarrow F$, $x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F$.

Remarque 3.11. (i) p_F est linéaire, i.e., $p_F \in \mathcal{L}(E, F)$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est complètement caractérisé par la propriété suivante : Soit $y \in E$. Alors,

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp)$$

et $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. En particulier, $\langle p_F(x), x - p_F(x) \rangle = 0$ et $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. On a la conséquence suivant : si $(v_1, \dots, v_k)$ est une BON de F , alors :

$$\forall u \in E, p_F(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, v_i \rangle v_i.$$

En effet, il suffit de vérifier que le vecteur $w = \sum_{i=1}^k \langle u, v_i \rangle v_i$ vérifié :

$$w \in F \text{ et } u - w \in F^\perp.$$

Proposition 3.12. Soit $x \in E$. Alors,

$$\|x - p_F(x)\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\},$$

i.e., $\|x - p_F(x)\|$ est la distance de x à F .

Démonstration. Car $p_F(x) \in F$ il suffit de prouver que, si $y \in F$, alors $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$. Mais $\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$ car $(x - p_F(x)) \perp (p_F(x) - y)$ (car $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$). $\square$

3.3 L'algorithme de Gram-Schmidt

Théorème 3.13. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle, \rangle$. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'éléments $\in E$. Alors, $\exists$ une famille $(w_1, \dots, w_n)$ orthogonale telle que $\forall 1 \leq i \leq n$,

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i).$$

Démonstration. Réccurence sur i :

$i = 1$: $w_1 := v_1$ suffit.

$i \geq 1$: Supposons $(w_1, \dots, w_i)$ construits. Posons $F_i := \text{Vect}(w_1, \dots, w_i)$, alors on prend

$$w_{i+1} := v_{i+1} - p_{F_i}(v_{i+1}).$$

Donc, $w_{i+1} \in F_i^\perp$ (par caractérisation de p_{F_i}) et $(w_1, \dots, w_{i+1})$. On vérifie par récurrence que $F_i = \text{Vect}(w_1, \dots, w_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$. On note $p_{F_i}(v_{i+1}) \in F_i$, donc

$$\text{Vect}(w_1, \dots, w_i, w_{i+1}) \underset{w_{i+1} = v_{i+1} - p_{F_i}(v_{i+1})}{=} \text{Vect}(w_1, \dots, w_i, v_{i+1}) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}).$$

□

Remarque 3.14. On note que le preuve de [3.13](#) et [3.11](#) donnent une recette concrète pour construire une BON : Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Le but : Construit une base $(w_1, \dots, w_n)$ orthogonale de E avec $\text{Vect}(w_1, \dots, w_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i)$

(i) Poson $w'_1 := v_1$.

(ii) Supposons $(w_1, \dots, w_i)$ construits. Posons

$$w_{i+1} := v_{i+1} - \sum_{j=1}^i \frac{\langle v_{i+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

En effet, $p_{F_i}(v_{i+1}) = \sum_{j=1}^i \frac{\langle v_{i+1}, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$ par [3.11](#) (on applique [3.11](#) à la BON $(\frac{1}{\|w_1\|} w_1, \dots, \frac{1}{\|w_i\|} w_i)$ de F_i).

(iii) Pour obtenir une BON $(w'_1, \dots, w'_n)$ de E posons

$$w'_i := \frac{1}{\|w_i\|} w_i, \forall i = 1, \dots, n.$$