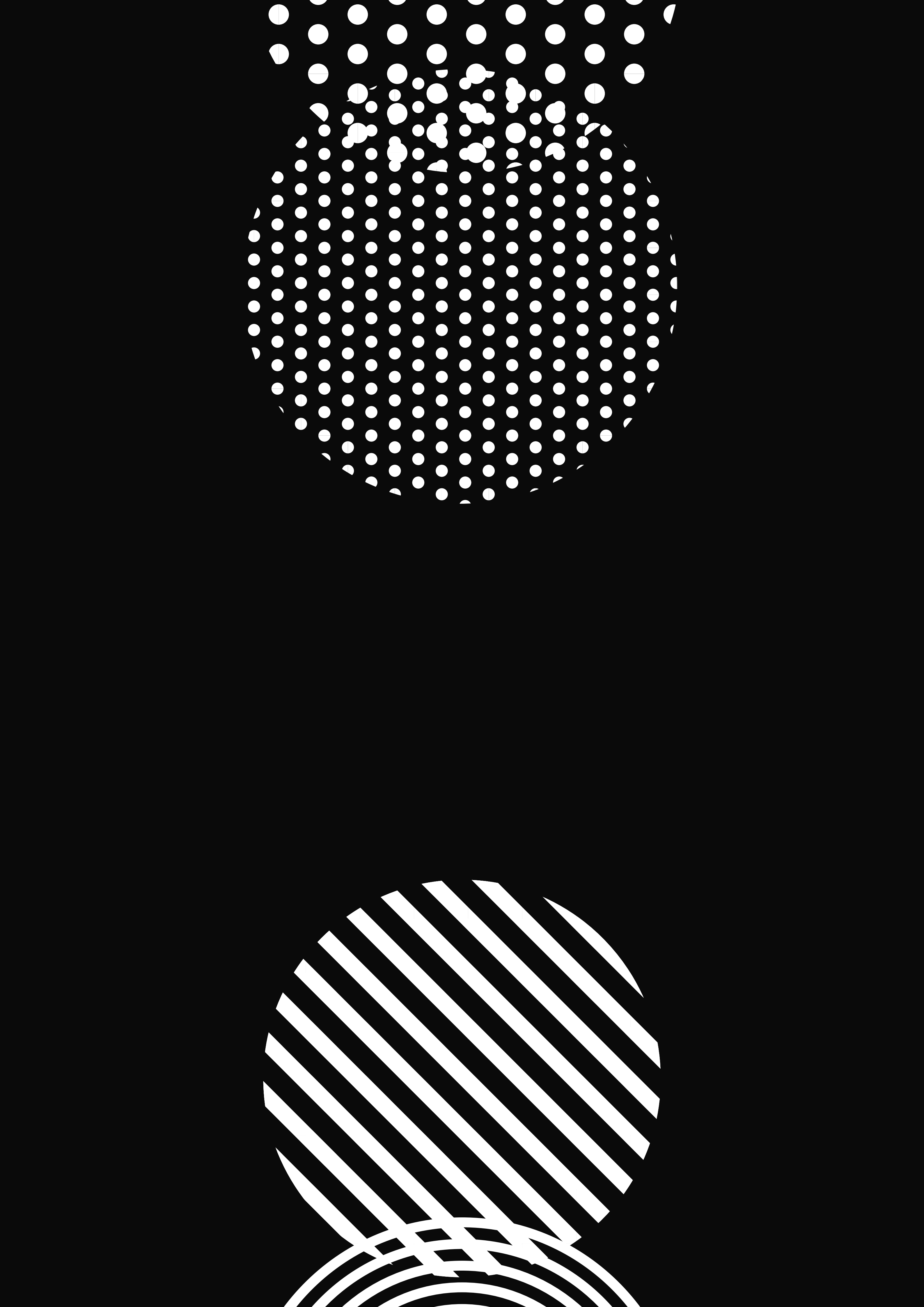

TD 4

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale i.e $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $D = P^{-1}AP$

$E = \bigoplus_{\lambda \in Q} \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$ où $Q = \{$ valeurs propres de $f\}$

Exercice A 1)

1 => 3

Supposons que $p \circ p = p$

$p(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{Im}\, p$

On veut mq $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$

$x = (x - p(x)) + p(x)$ Évidemment $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$

Mq $(x - p(x)) \in \mathrm{Ker}\, p$

$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$

Donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$

Il nous reste à montrer que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0\}$

Soit $z \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$ donc $z = p(x)$ avec $x \in E$
$p(z) = 0$ alors $p(p(x)) = 0 = p(x) = z$

donc $z = 0$

$p(E) = \mathrm{Im}\, p$

$\Rightarrow p(p(E)) = p(E)$

$\Rightarrow p(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{Im}\, p$ donc $p_{\mathrm{Im}\, p} = \mathrm{Im}\, p$

2 <=> 3

Il suffit de mq

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$ donc $x - p(x) = 0 \Rightarrow x = p(x)$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p$

Soit $x \in \mathrm{Im}\, p$

$3 \Leftrightarrow 4$

Supposons que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$

$\dim E = n$

donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker} p + \dim \operatorname{Im} p$

$= s + r$

or $p(x) = x$ si $x \in \operatorname{Im} p$, donc

$$\operatorname{Mat} p = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_s \end{pmatrix}$$

Soit $\{e_1, \dots, e_s\}$ une base de $\operatorname{Ker} p$
et $\{d_1, \dots, d_r\}$ une base de $\operatorname{Im} p$

donc $\{d_1, \dots, d_r, e_1, \dots, e_s\}$ est une base de E

$$p(E) = \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{1 \;\; 1 \; \dots \; 1}}^{r} & \\ & \overbrace{\boxed{0 \; \dots \; 0}}^{s} \end{pmatrix}$$

Supposons $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ mq $p \circ p = p$

Soit $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} p$, $z \in \operatorname{Im} p$

$$p^2(x) = p^2(y+z) = p(p(y) + p(z)) = \underline{p(p(z)) = p(z)} = p(y+z) = p(x) \quad \text{car } p(y) = 0$$

2) Symmétrie

$4 \Leftrightarrow 5$ On prend une base adaptée

Montrons $\underline{1 \Rightarrow 4}$

$s \circ s = Id_E$ mq $E = \operatorname{Ker}(s + Id) \oplus \operatorname{Ker}(Id - s)$

$$x = \frac{(x+s) + (x-s)}{2} = \underbrace{\frac{x+s}{2}}_{\in \operatorname{Ker}(Id - s)} + \underbrace{\frac{x-s}{2}}_{\in \operatorname{Ker}(Id + s)}$$

Montrons que $x + s \in \operatorname{Ker}(Id - s)$

$Id - s(x+s) = x - s(x) + s(x) - (x) = 0.$ donc $x + s \in \operatorname{Ker}(Id - s)$

$(Id + s)(x - s) = x + s(x) - s(x) - x = 0$ donc $x - s \in Ker(Id + s)$

$Ker(s + Id) \cap Ker(Id - s) = \{0\}$ exo

Supposons $s \circ s = Id_E$ mq $p^{+2} = p^+$

$p^+ = \frac{1}{2}(Id_E + s)$ $\quad p^{+2} = \frac{1}{4}(Id_E + 2s + s^2)$

$= \frac{1}{2}(Id_E + s) = p^+$

3)

Soit $(E, \langle\rangle)$, soit p un projecteur

Suppose $Ker(p) \perp Im\, p$

$x = (x - p(x)) + p(x)$

$\|x\| = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2$

par le théorème de pythagore or $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$
$\geq \|p(x)\|^2$

Comme $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^2$ est

$\forall x, y \in E \quad \langle p(x), y\rangle = \langle x, p^*(y)\rangle$

donc $x = x_1 + x_1$ avec $x_1, y_1 \in Ker\, p$
$y = y_1 + y_2$ $\quad x_2, y_2 \in Im\, p$

$\langle p(x), y\rangle = \langle p(x_1 + x_2), y_1 + y_2\rangle$

$= \langle p(x_1) + p(x_2), y_1 + y_2\rangle$

$= \underbrace{\langle p(x_2), y_1\rangle}_{=0} + \langle p(x_2), y_2\rangle$

$= \langle p(x_2), y_2\rangle = \langle x_2, y_2\rangle$

$\langle x, p(y)\rangle = \dots = \langle x_2, y_2\rangle$

donc $p = p^*$

3) => 1) On suppose $p = p^*$ mq $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$

Soit $\begin{cases} x \in \operatorname{Ker} p \\ y \in \operatorname{Im} p \end{cases}$ donc $\exists\ z$ tq $y = p(z)$

donc $\langle x, y \rangle = \langle x, p(z) \rangle$

$= \langle p(x), z \rangle = 0$

donc $x \perp y$ donc $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$

Exercice 3

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ -2x - y \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=0}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}) = \operatorname{Ker}(f)$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{tq}\ f(x,y) = 0\}$$

On résout un système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

On sait que $0 \in \operatorname{Ker} f$. On a pris $(x,y) \in \operatorname{Ker} f$ et on a montré que $(x,y) = (0,0)$ donc $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$
donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

0 n'est pas valeur propre de f.

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ -2 & -1-1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad x = -y$$

$\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Ker}(f - \underset{1}{\lambda} \operatorname{Id}) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\lambda = 1$ est une valeur propre de f.

Exercice 4

$$\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$1, 2, -1 = \lambda$ sont valeurs propres de A

Exercice B

2)

$$f = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f + Id = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(f + Id) = 0$$

$rg(f + Id) = 2$ donc $\dim Ker(f + Id) = 1$

$(f + Id)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc $Ker(f + Id) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$(f - 2Id) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ donc $rg(f - 2Id) = 1$

donc $\dim(Ker(f - 2Id)) = 2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(f - 2Id)$ donc $Ker(f - 2Id) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice C

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ -6 & -5-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det(A - \lambda Id) = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)((5-\lambda)(-5-\lambda) + 24)$$

(-1)

$$-25 + 5\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 24 = 0 = \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ et } \lambda = -1$$

$Sp = \{-1, 1\}$

$$Ker(A + 1Id) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$6x = -4y - 2z$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{6}y - \frac{2}{6}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A - Id) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\dim = 1$

2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=P} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = Id$$

3) Or $A^2 = Id$ donc A symmétrie.

$F = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Exercice D

1) $AU_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U_1$

$AU_2 = 3U_2$

2) $A(U_1 - \frac{1}{3}U_2) = AU_1 - \frac{1}{3}AU_2 = 2U_1 - \frac{1}{3} \cdot 3U_2$

$= 2U_1 - U_2$

Donc $X = U_1 - \frac{1}{3}U_2$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{9} - \frac{1}{3} \\ \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice E

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8$$

$$-9 + 3\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 8 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$\lambda = 1$ et $\lambda = -1$

$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad x = -2y \quad \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 1$

$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = -1)$

Donc $E = \operatorname{Ker}(A - I_d) \oplus \operatorname{Ker}(A + 1 I_d)$

Donc A diagonalisable.

Exo F

$(A^2 + 3A - I_n)u = \underbrace{(\lambda^2 + 3\lambda - 1)}_{\text{v. propre}}u$ donc

Exercice G

1)
$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 7 & -5 \\ -3 & 9-\lambda & -5 \\ -3 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2-\lambda\left((2-\lambda)(-3-\lambda) + 14 - \lambda\right)$$

$$-3(2-\lambda)^2$$

$$= (2-\lambda)\left((2-\lambda)(-3-\lambda) + 14 - \lambda - 6 + 3\lambda\right)$$

$$= (2-\lambda)(-6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 14 - \lambda - 6 + 3\lambda$$

$$= (2-\lambda)(2 - 3\lambda + \lambda^2) = (2-\lambda)$$

$\lambda = 2$

$\lambda = 2$

$\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -9 \\ -3 & 15 & -11 \\ -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 11 & -9 \\ -3 & 15-\lambda & -11 \\ -3 & 13 & -9-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 11 & -9 \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -3 & 13 & -9-\lambda \end{pmatrix} = 2-\lambda \begin{pmatrix} -1-\lambda & 11 & -9 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 13 & -9-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2-\lambda \begin{pmatrix} -1-\lambda & 11 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 13 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= 2-\lambda \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)((-1-\lambda)(4-\lambda)+6)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} -3 & 11 & -9 \\ -3 & 13 & -11 \\ -3 & 13 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 11 & -9 \\ -3 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 11 & -9 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-3x + 11y = 9z \qquad \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$
$$2y = 2z$$

Donc $\dim(\text{Ker}(A - 2I_3)) = 1 \neq 2$ Donc A n'est pas diagonalisable

Exercice H

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

Les valeurs propres sont $1, 2, -1$

2) $\text{Ker}(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dim 1 donc ligne

$\text{Ker}(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ dim 1 donc ligne

$$\text{Ker}(A+I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$6x = 10z$

dim 1 donc droite

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice I

1) Si λ était une valeur propre de A, on aurait $\det(A) = 0$, mais par l'hypothèse A est inversible, donc $\det(A) \neq 0$, d'où $\lambda \neq 0$.

2) Soit $x \in E$ v.p de A de val. p λ

i.e $Ax = \lambda x$

$\frac{1}{\lambda} A x = x \qquad A^{-1}(\frac{1}{\lambda} Ax) = A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$

$A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x$ donc x est un vecteur propre de A de valeur propre de A^{-1} de valeur propre λ^{-1}

Exercice J

1) Soit $A = \text{Mat}(f)$

$A^k = 0$

i.e $\det(A - 0I)^k = 0$ donc 0 est un seul valeur propre de f

$\det(A - \lambda I) \det(A - \lambda I)^{k-1} = 0$

$= \det(A - \lambda I)^k = 0$ donc $\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A) = 0$ donc 0 est la seule valeur propre de A

2) Comme 0 est la seule valeur propre et f diagonalisable, donc $\text{Ker}(A - 0I) = \text{Ker}(A) = \dim E$

donc $\forall x \in E$, $Ax = 0$ donc $A = 0$

3) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice *

$AB = (Id - B)A$

$\varphi : E \longrightarrow E$
$M \longmapsto MB - BM$

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A) = \lambda (AB - BA)$

$\varphi(Q+R) = (Q+R)B - B(Q+R)$

$= (QB - BQ) + (RB - BR)$

$= \varphi(Q) + \varphi(R)$

Donc φ linéaire.

2) Hyp: $\varphi(A^k) = k A^k$

Base case $\varphi(A^1) = AB - BA = A$ ☐

On suppose P_k

$A^k B - BA^k = kA^k$

$A^{k+1}B - BA^{k+1} = A(A^k B - BA^k) + ABA^k - BA^{k+1}$

$= AkA^k + (AB - BA)A^k$

$= kA^{k+1} + A^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$

Donc $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

3) Supposons $A^k \neq 0 \quad \forall k$

si $k \in \mathbb{N}$, A^k vecteur propre de φ pour la val. propre k

contradiction car app. linéaire a dimension finie.