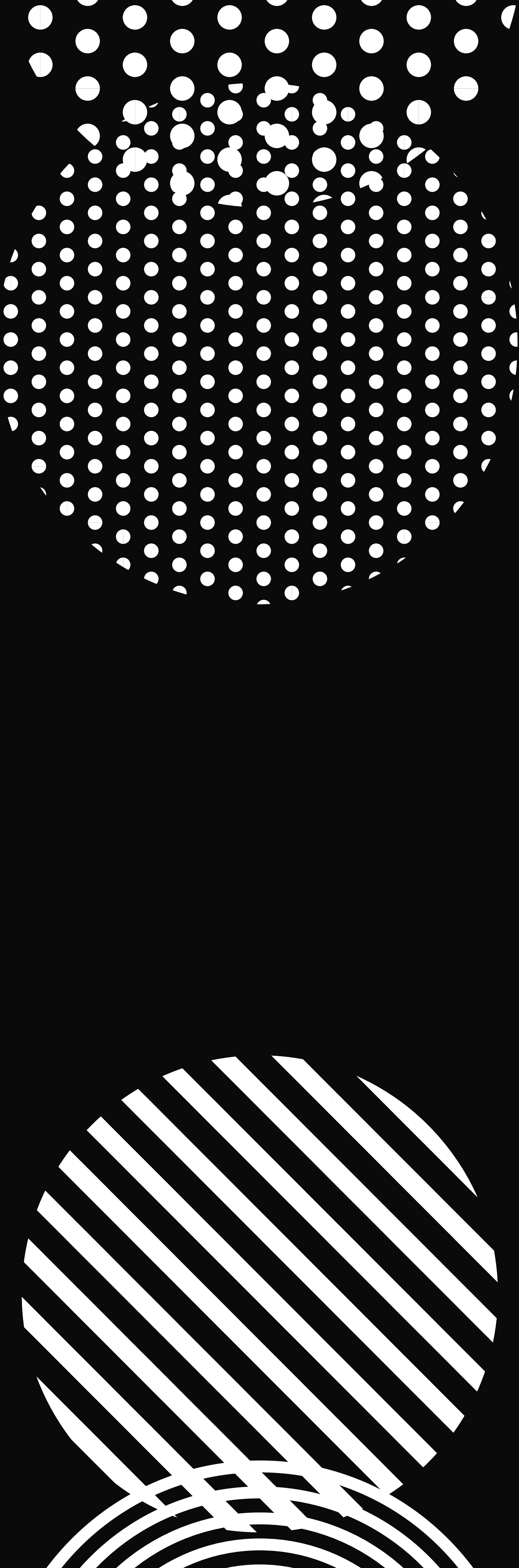


Exercice 1

1) $w_1 = e_1 + e_2 - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$w_2 = e_1 - e_3 + \lambda e_1 + \lambda e_2 - \lambda e_3$

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$\langle e_1 + e_2 - e_3 , e_1 - e_3 + \lambda(e_1 + e_2 - e_3) \rangle = 0$

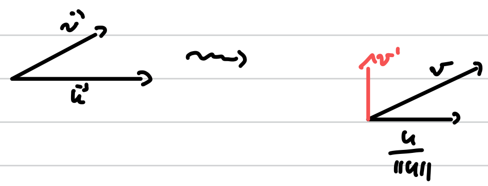
$= \langle e_1, e_1 \rangle - \langle e_1, e_3 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 + e_2 - e_3 \rangle +$

λ

$$\lambda = -\frac{\langle e_1 - e_3, e_1 + e_2 - e_3 \rangle}{\| e_1 + e_2 - e_3 \|^2} = -\frac{1+1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $V = \mathrm{Vect}(2e_1 + e_2 + e_3 , e_1 + 3e_2 - e_3)$



$$v' = v - \langle v, \frac{u}{\|u\|} \rangle \frac{u}{\|u\|}$$

$$\frac{2e_1 + e_2 + e_3}{\|2e_1 + e_2 + e_3\|} = u = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{(2+3-1)}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{49}{9} + \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{75}}{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$v' = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{5\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

c) $(v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = 1 - 1 = 0$$

donc $u_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$

$\langle v_3, u_1 \rangle = -1 + 2 + 1 = 2$

$\|u_2\|^2 = 4$

$\langle v_3, u_1 \rangle = -1$

$\|u_1\|^2 = 2$

Donc $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base orthonormale.

$$(u_1', u_2', u_3') = \left(\frac{u_1}{\sqrt{2}}, \frac{u_2}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} u_3 \right)$$

Exercice 2

a) $(u, v, w) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&0\\3&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}$$

$$= 2-6 + 2-6 = -8$$

Donc u, v, w est bien une base de $\mathbb{R}^3$

b) $\|u\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$$u' = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} u = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$v = V - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{14}} \langle v, u\rangle}_{\frac{10}{\sqrt{14}}} \frac{1}{\sqrt{14}} u = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}32\\8\\-16\end{pmatrix} = \frac{8}{14}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\|v\| = \frac{4}{7}\sqrt{16+1+4} = \frac{4}{7}\sqrt{21}$$

$$V' = \frac{v}{\|v\|} =$$

$$V' = \frac{7}{\sqrt{21}\,\cancel{4}} \frac{\cancel{8}}{\cancel{2}\cancel{7}}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\langle W, u'\rangle = \frac{4}{\sqrt{14}}$$
$$\langle W, V'\rangle = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\omega = W - \langle W, u'\rangle u' - \langle W, V'\rangle V'$$

$$= \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}7\\0\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}7\\-14\\7\end{pmatrix}$$

$$W' = \frac{\omega}{\|\omega\|} \qquad \|\omega\| = \frac{1}{21}\sqrt{98+14^2} = \frac{1}{21}\sqrt{98+196}$$

c) $Vect(v^{\perp}) = Vect(u', w')$

$Vect(u, v)^{\perp} = Vect(w')$

Exercice 3

a) $n+1$

$$\langle P+\lambda P', \underbrace{Q+\mu Q'}_{Q^k} \rangle = \int_{-1}^{1} (P+\lambda P') Q'' (1-t^2)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} P Q'' (1-t^2) dt}_{\langle P, Q'' \rangle} + \int_{-1}^{1} \lambda P' Q'' (1-t^2) dt$$

$$+ \langle \lambda P', Q'' \rangle$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} P(Q+\mu Q')^{(1-t^2)} dt}_{\langle P, Q+\mu Q' \rangle} + \lambda \underbrace{\int_{-1}^{1} P' Q'' (1-t^2) dt}_{\lambda \langle P', Q^k \rangle}$$

$$= \int_{-1}^{1} PQ(1-t^2) dt + \mu \int_{-1}^{1} Q'(1-t^2) dt + \lambda \int_{-1}^{1} P' Q (1-t^2) dt$$
$$+ \lambda\mu \int_{-1}^{1} P' Q' (1-t^2) dt$$

$$= \langle P, Q \rangle + \mu \langle P, Q' \rangle + \lambda \langle P', Q \rangle + \lambda\mu \langle P', Q' \rangle$$

$\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$

$\langle P, P \rangle = \underbrace{\int_{-1}^{1} P \cdot P (1-t^2) dt}_{\text{positive si } P>0 \text{ et } P<0}$

$\int_{-1}^{1} P \cdot P (1-t^2) dt = 0 \Rightarrow P \cdot P = 0$ ou $(1-t^2) = 0$

$\neq 0$ pour $t \in]-1, 1[$

Donc $\underline{P = 0}$

c)

$$u_1 = \frac{1}{\|1\|} \qquad \|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt} = \sqrt{\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \sqrt{2-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle X, u_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{t(1-t^2)}_{\text{impair}}\,dt = 0$$

$$\tilde{u}_2 = X - \underbrace{\langle X, u_1\rangle}_{=0} u_1 = X$$

$$\|\tilde{u}_2\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\|\tilde{u}_2\| = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$u_2 = \frac{X\sqrt{15}}{2}$$

$$\langle X^2, u_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,dt = \frac{4\sqrt{3}}{30}$$

$$\langle X^2, u_2\rangle = \frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1} t^3(1-t^2)\,dt = 0$$

$$\tilde{u}_3 = X^2 - \frac{3}{15} = X^2 - \frac{1}{5}$$

$$\|\tilde{u}_3\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{5}\right)^2(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{1}\left(t^4 - \frac{2}{5}t^2 + \frac{1}{25}\right)(1-t^2)\,dt$$

$$= \dots$$

$$\deg(P_n) = n$$

$$P_n = X^n - \underbrace{\dots}_{\deg < n}$$

Exercice 4

$\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$

$\langle P+\lambda P', \underbrace{Q+\mu Q'}_{Q''}\rangle$

$= P(0) + \lambda P'(0)\, Q'' + \dots$

$= P(0)Q'' + \lambda P'(0)Q'' + \dots$

$= P(0)Q'' + P(1)Q'' + \dots + P(4)Q'' + \lambda(P'(0)Q'' + P'(1)Q'' + \dots + P'(4)Q'')$

$= \langle P, Q''\rangle + \lambda\langle P', Q''\rangle$

$= \langle P, Q\rangle + \mu\langle P, Q'\rangle + \lambda\langle P', Q\rangle + \lambda\mu\langle P', Q'\rangle$

$\langle P, P\rangle = P(0)P(0) + \dots + P(4)P(4) \geq 0$

$\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P(0)P(0) + \dots + P(4)P(4) = 0$

$\Rightarrow \underline{P = 0}$

Exercice 5

1) Soit A, B

Supposons $A \subset B$

Donc soit $v \in E$

Soit $x \in B^\perp$

$\forall x' \in A$, $x' \in B$ car $A \subset B$ et $\langle x, x'\rangle = 0$ car $x \in B^\perp$

donc $x \in B^\perp \Rightarrow x \in A^\perp \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

2) mq $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Soit $x \in (A \cup B)^\perp$, alors, $\forall x$

alors $\forall x' \in A$, $x' \in A \cup B \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$

$\Rightarrow x \in A^\perp$

$\forall x'' \in B$, $x'' \in A \cup B \Rightarrow \langle x'', x \rangle = 0 \Rightarrow x \in B^\perp$

donc $x \in A^\perp \cap B^\perp$

donc $(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$

Mq $A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$

Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$ Alors:

$x' \in A \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$

$x' \in B \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$

or $x' \in A \cup B$, donc $x' \in A$ ou $x' \in B$

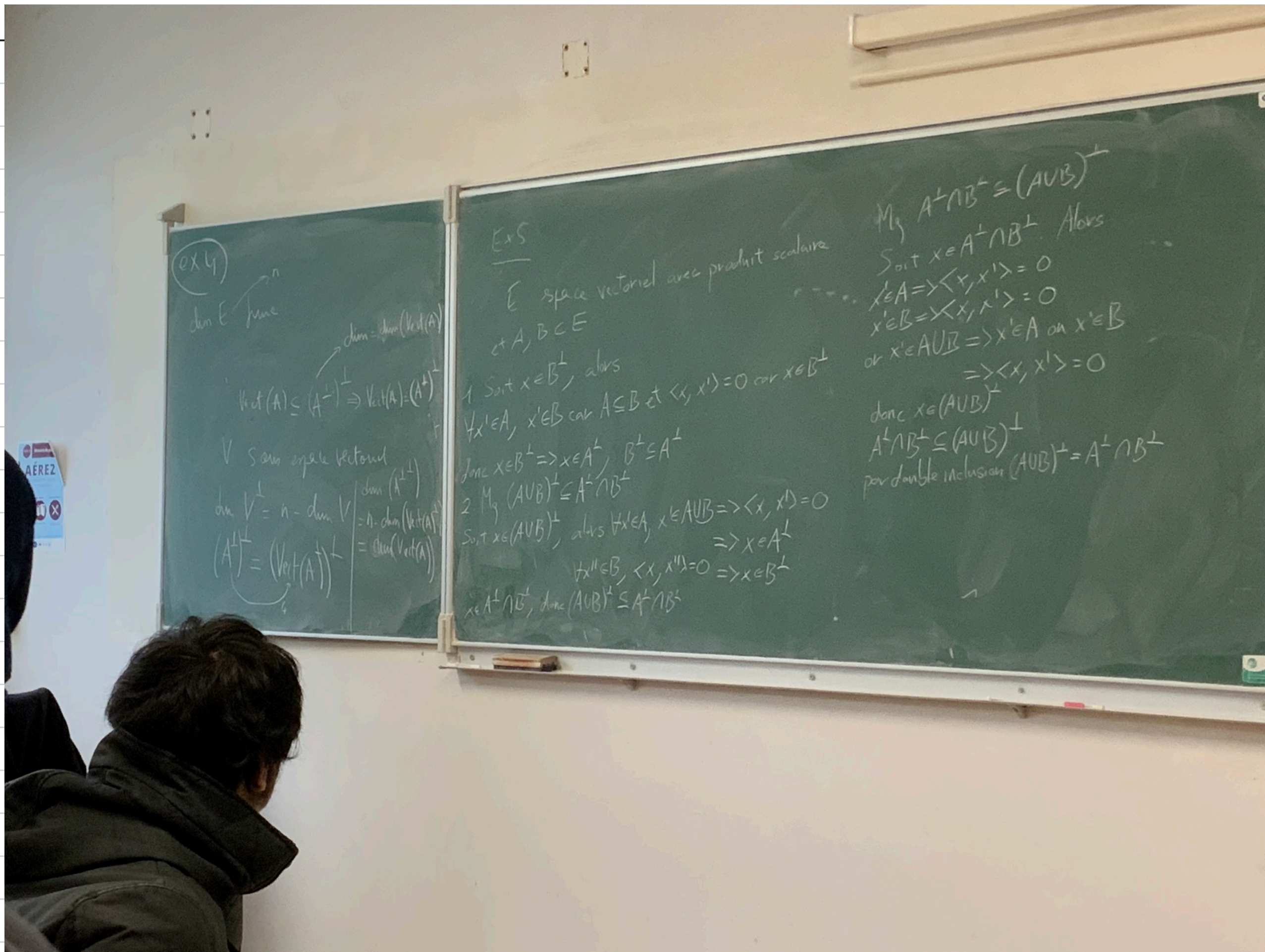
$\Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$

donc $x \in (A \cup B)^\perp$

$A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$

Donc $A^\perp \cap B^\perp = (A \cup B)^\perp$

3)



ex 4
dim E finie
V sous espace vectoriel
$\dim V^\perp = n - \dim V$
Ex 5
E espace vectoriel avec produit scalaire
et $A, B \subset E$
1 Soit $x \in B^\perp$, alors
$\forall x' \in A$, $x' \in B$ car $A \subseteq B$ et $\langle x, x' \rangle = 0$ car $x \in B^\perp$
donc $x \in B^\perp \Rightarrow x \in A^\perp$, $B^\perp \subseteq A^\perp$
2 Mq $(A \cup B)^\perp \subseteq A^\perp \cap B^\perp$
Soit $x \in (A \cup B)^\perp$, alors $\forall x' \in A$, $x' \in A \cup B \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0 \Rightarrow x \in A^\perp$
$\forall x'' \in B$, $\langle x, x'' \rangle = 0 \Rightarrow x \in B^\perp$
$x \in A^\perp \cap B^\perp$, donc $(A \cup B)^\perp \subseteq A^\perp \cap B^\perp$
Mq $A^\perp \cap B^\perp \subseteq (A \cup B)^\perp$. Alors
Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$
$x' \in A \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$
$x' \in B \Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$
or $x' \in A \cup B \Rightarrow x' \in A$ ou $x' \in B$
$\Rightarrow \langle x, x' \rangle = 0$
donc $x \in (A \cup B)^\perp$
$A^\perp \cap B^\perp \subseteq (A \cup B)^\perp$
par double inclusion $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

Exercice 6

$F \subset F+G$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$

$G \subset F+G$ donc $(F+G)^\perp \subset G^\perp$

En tout, $\underline{(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp}$

Soit $w \in F^\perp \cap G^\perp$. Soit $u \in F$ et $v \in G$, alors

$\langle u+v, w\rangle = \underbrace{\langle u, w\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0}$

donc $w \in (F+G)^\perp \Rightarrow F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$

2) a) $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$

donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

D'où puisque $(F \cap G)^\perp$ un s.e.v. de E $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

b) par 1 $(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp$

Or puisqu'on est en dim. finie et que F et G sont des s.e.v, $F^{\perp\perp} = F$ $G^{\perp\perp} = G$

Donc $(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G$

Donc $\underbrace{(F^\perp + G^\perp)^{\perp\perp}}_{= F^\perp \cap G^\perp} = (F \cap G)^\perp$ puisque $\dim E < \infty$
s.e.v.

Excercice 7

$n \geq 1$ $\quad E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Pour $A, B \in E$ on pose

$\langle A, B \rangle = Tr({}^tAB)$

1) $\dim E = n^2$

Base $(E_{i,j})$ matrice avec 1 en position (i,j) et 0 ailleurs.

2) Mq $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire

- forme bilinéaire
  - linéaire par rapport à A et B

$A \longmapsto {}^tA$ est lineaire
$A \longmapsto AB$ est linéaire (avec B fixé)
$B \longmapsto AB$ est linéaire (avec A fixé)
Tr est linéaire

la composée d'application linéaire est linéaire.

Si $A, B \in E$

$$\begin{aligned} \langle B, A \rangle = Tr({}^tBA) &= Tr(A\,{}^tB) \\ &= Tr({}^t(A\,{}^tB)) \\ &= Tr({}^t({}^tB)\,{}^tA) \\ &= Tr(B\,{}^tA) \\ &= Tr({}^tAB) = \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

Définie soit $A \in E$

Si $\langle A, A \rangle = 0$, on a $Tr(\underbrace{\underbrace{{}^tA}_{B} A}_{C}) = 0$

càd $\sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = 0$

où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{b_{i,k}}^{a_{k,i}} a_{k,j}$ $\quad c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, a_{k,i}$

On a donc : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha,i}^2 = 0$ donc la somme des carrés

de tous les coefficients de A est nulle. D'où $A = 0$.

⊕ positive $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha,i}^2 \geq 0$

D'où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit vectoriel sur E.

3) $S_n(\mathbb{R}) = \{ A \in E : {}^tA = A \}$
$A_n(\mathbb{R}) = \{ A \in E : {}^tA = -A \}$

Mq $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^{\perp}$

$A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont des s.e.v de E

Base de $S_n(\mathbb{R})$ les $E_{i,i}$ pour $i = 1 \dots n$
et les $\frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{j,i})$ pour $i = 1 \dots n$
$j = i+1 \dots n$

$\dim S_n(\mathbb{R}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Base de $A_n(\mathbb{R})$
les $\frac{1}{2}(E_{i,j} - E_{j,i})$ pour $i = 1, \dots, n$
$j = i+1 \dots n$

$\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

Montrons que $S_n(\mathbb{R})^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$
$A \in S_n(\mathbb{R})^{\perp}$ signifie :
$\forall M \in S_n(\mathbb{R})$
$Tr({}^tAM) = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in S_n(\mathbb{R}), \; 2\,Tr({}^tAM) = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in S_n(\mathbb{R})$
$Tr({}^tAM) + Tr(A\,{}^tM) = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in S_n(\mathbb{R}) \quad Tr(({}^tA + A)M) = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in S_n(\mathbb{R}), \; Tr({}^t(A + {}^tA)M) = 0$
$\Leftrightarrow \forall M \in S_n(\mathbb{R}), \; \langle A + {}^tA, M \rangle = 0$

Si $A \in A_n(\mathbb{R})$ alors $A + {}^tA = 0$.

Montrons $\subset$

Soit $A \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$ Comme $A + {}^tA \in S_n(\mathbb{R})$ par ($\cancel{A}$) on a $\langle A + {}^tA, A + {}^tA \rangle = 0$

Donc puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire on a : $A + {}^tA = 0$. D'où $A \in A_n(\mathbb{R})$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})$ puisque $A_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

<u>Exercice 2</u>

- $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ esp. euclidien
- $n = \dim E \geq 2$
- $(e_1, \dots, e_n)$ Bon de E
- $1 \leq r \leq n-1$
- $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$
- p_F projection orthogonale sur F

$\mathcal{M}_q$:

1) $\forall x \in E$, $p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_r \rangle e_r$

2) $\forall x \in E$, $\mathrm{dist}(x, F) = \left(\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

1) Soit $x \in E$

Soit $y = p_F(x)$ et $z = x - y$

On a : $x = y + z$, $y \in F$

- $y = p_F(x) = p_F(y + z) = \underbrace{p_F(y)}_{y} + p_F(z)$

D'où $p_F(z) = 0$

Comme $y \in F$, y est une combinaison linéaire des e_i $i=1,\dots,r$

Notons $(y_i)_{i=1\dots r}$ ses coordonnées dans cette base de F

$y = \sum_{i=1}^{r} y_i e_i$ et notons $(x_i)_{i=1\dots n}$ les coordonnées de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{Donc} \quad \forall j \in \{1,\dots,n\},\ \langle x, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{\substack{1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon}}}$$

D'où : $\forall j = 1$ à n $\quad \langle x, e_j\rangle = x_j$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} x_i e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j=r+1}^{n} x_j e_j}_{\in F^\perp}$$
$$\quad\ \ = y \qquad\qquad\quad = z$$

Donc $y = \sum_{i=1}^{r} \overset{\langle x, e_i\rangle}{x_i}\, e_i$ c.à.d $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle e_i$

$$\mathrm{dist}(x, F) = \inf_{u \in F} \mathrm{dist}(x, u)$$

Comme $y \in F$

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(x, F) &\leq \mathrm{dist}(x, y) \\ &= \|x - y\| \\ &= \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} \\ &= \langle z, z\rangle \\ &= \Big(\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2\Big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Exercice 9

$$P = \{ x + 2y - 2z = 0 \}$$

$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in P \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in P$

$u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\tilde{u}_2 = v - \langle v, u_1 \rangle u_1$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\langle v, u_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\|\tilde{u}_2\| = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$

$1 + 4 - 4 \neq 0$, donc $u_3 \notin P$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ BON de $\mathbb{R}^3$ $\qquad u_3 \perp P$

$u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$

$\langle u, u_1 \rangle = \alpha \langle u_1, u_1 \rangle = \alpha$

$\alpha = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{2}$

$\beta = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\gamma = \left\langle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{3}$

Exercice 10

$G : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

1) $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{BON} \Big)$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^4, \quad p_G(x) = \langle x, g_1 \rangle g_1 + \langle x, g_2 \rangle g_2$

$p_G(e_1)$:

$\left.\begin{array}{l} \langle e_1, g_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle e_1, g_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_G(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$p_G(e_2)$:

$\left.\begin{array}{l} \langle e_2, g_1 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle e_2, g_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_G(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$p_G(e_3)$:

$\left.\begin{array}{l} \langle e_3, g_1 \rangle = 0 \\ \langle e_3, g_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow p_G(e_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \langle e_4, g_1 \rangle = 0 \\ \langle e_4, g_2 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi : $\mathrm{Mat}_\beta(p_G) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \\ x_3 - x_4 \\ -x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, G \right) = \left\| P_G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 2x_1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_2 \\ x_3 - x_4 - 2x_3 \\ -x_3 + x_4 - 2x_4 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 + 2(x_3 + x_4)^2}$$

Exercice 13

$\mathbb{R}_n[X]$ $\qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t)\, dt$

$\varphi : P(X) \mapsto P(-X)$

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(-t) Q(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} P(u)\, Q(-u)\, du = \langle P, \varphi(Q) \rangle$$

$$\Rightarrow \varphi^* = \varphi$$

Exercice 14

$$\| f(x) - f(y) \| = \sqrt{\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle - \langle f(x), f(y) \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle}$$

$\forall x \in E \quad \langle f(x), f(x) \rangle = \| f(x) \|^2 = \| f(x) - f(0) \|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

$$\| f(x) - f(y) \|^2 = \underbrace{\langle f(x), f(x) \rangle}_{\langle x, x \rangle} - 2 \langle f(x), f(y) \rangle + \underbrace{\langle f(y), f(y) \rangle}_{\langle y, y \rangle}$$

Mais $\|x - y\|^2 = \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

On a bien $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

2) $(e_1, \dots, e_n)$ BON de E

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$(f(e_1), \dots, f(e_n))$ BON de E

3) $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle f(e_i)$$

f linéaire.

Exercice 15

$A \in GL_n(\mathbb{R})$

$A = (C_1 | \dots | C_n)$

1. $$w_1 = \frac{C_1}{\|C_1\|} = \frac{1}{\|C_1\|} C_1$$

$$e_2 = \frac{C_2 - \langle C_2, w_1 \rangle w_1}{\|C_2\|} = C_2 - \frac{\langle C_2, C_1 \rangle}{\|C_1\|^2} C_1$$

$$w_2 = \frac{1}{\|e_2\|} C_2 - \frac{\langle C_2, C_1 \rangle}{\|e_2\| \|C_1\|^2} C_1$$

On voit bien par le procédé de Gram Schidt à chaque vecteur le nouveau base on ajoute un vecteur.
Donc à la fin on va obtenir la matrice triangulaire sup. avec coefficients positive

2. Or $\mathcal{E}$ est orthonormale (car canonique) et $\mathcal{B}$ aussi d'après énoncé. Donc la matrice de passage est aussi orthogonale.

3. $\mathcal{B} = \qquad \underbrace{P^{-1} \mathcal{E} P}_{\mathcal{U}}$

$$\mathcal{B} = P^{-1} A P$$

$$P \mathcal{B} P^{-1} = A$$

$$A = \underbrace{P_{\alpha}}_{\text{tz sup}} \, \mathcal{U} \, \underbrace{P_{\alpha}^{-1}}_{\text{tz sup}}$$