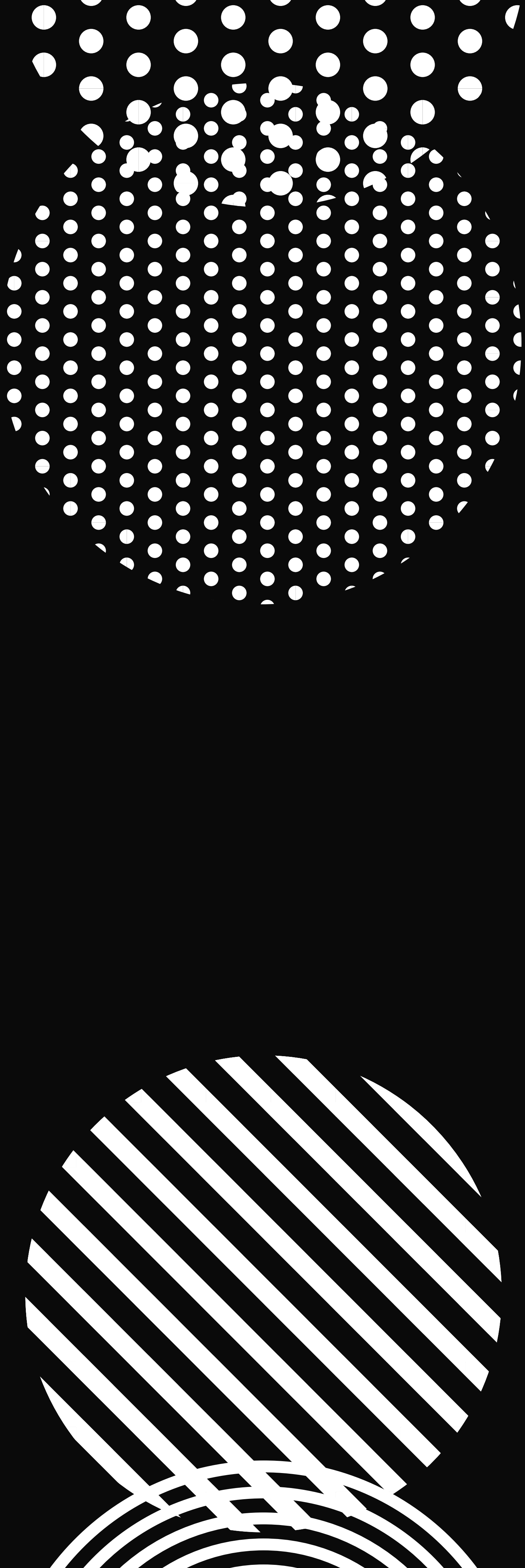

Exercice 1

a) $e_1+e_2-e_3,\ e_1-e_3$

$$v_1' = e_1+e_2-e_3$$

$$w_1 = \frac{e_1+e_2-e_3}{\|e_1+e_2-e_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_2' = e_1-e_3 - \langle e_1-e_3, w_1\rangle w_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}(1+1)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{v_2'}{\|w_2'\|} = \qquad \|w_2'\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

b) $(2e_1+e_2+e_3,\ e_1+3e_2-e_3)$

$$v_1' = 2e_1+e_2+e_3 \qquad \|2e_1+e_2+e_3\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \langle v_2, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2+3-1) = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$w_2' = \overbrace{e_1+3e_2-e_3}^{v_2} - \langle v_2, w_1\rangle w_1$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$w_2' = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}3\\9\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix}$$

$$\|w_2'\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+49+25} = \frac{1}{3}\sqrt{75}$$

$$v_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \frac{3}{\sqrt{75}}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{75}}\begin{pmatrix}-1\\7\\-5\end{pmatrix}$$

c) $(v_1, v_2, v_3) = (e_1+e_2,\ e_1-e_2+e_3+e_4,\ -e_1+2e_3+e_4)$

$$= \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$w_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \|w_1'\| = \sqrt{2}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{w_1'}{\|w_1'\|}$$

$$\langle v_1, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-1) = 0$$

$$w_2' = v_1 - \langle v_1, w_1\rangle w_1$$

$$= v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \|w_2'\| = \sqrt{1+1+1+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \langle v_3, w_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)$$

$$\langle v_3, w_2\rangle = \frac{1}{2}(-1+2+1) = 1$$

$$w_3' = v_3 - \langle v_3, w_1\rangle w_1 - \langle v_3, w_2\rangle w_2$$

$$= v_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$\|w_3'\| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4+4+9+1}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$w_3 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\\1\end{pmatrix}$

Donc BON : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\\1\end{pmatrix}\right)$

Exercice. 2

$u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad w = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

a) Il y a 3 vecteurs. Donc il suffit de montrer qu'ils sont libres.

$\begin{vmatrix}1&3&1\\2&2&0\\3&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&3\\2&2\end{vmatrix}$

$= 2-6+2-6 \neq 0$

Donc ils sont libres et (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

b) $e_1' = u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\|e_1'\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ Donc $e_1 = \frac{e_1'}{\|e_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\langle v, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}}(3+4+3) = \frac{10}{\sqrt{14}}$

$e_2' = v - \langle v, e_1\rangle e_1$

$= v - \frac{10}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix}30\\12\end{matrix}$

$= \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{14}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\left(\begin{pmatrix}42\\28\\14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}32\\8\\-16\end{pmatrix} = \frac{8}{14}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\|e_2'\| = \frac{4}{7}\sqrt{16+1+4} = \frac{4}{7}\sqrt{21}$

$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{7}{4\sqrt{21}}\frac{4}{7}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\langle w, e_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} |4| = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\langle w, e_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$e_3' = w - \frac{4}{\sqrt{14}} e_1 - \frac{2}{\sqrt{21}} e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{21} \left(\begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 - 6 - 8 \\ 0 - 12 - 2 \\ 21 - 18 + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|e_3'\| = \frac{1}{3} \sqrt{1 + 4 + 1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = \frac{3}{\sqrt{6}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\mathrm{Vect}(u)^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$

$\mathrm{Vect}(u, v)^\perp = \mathrm{Vect}(e_3)$

Exercice 3

c) $e_1' = 1$

$e_1 = \frac{1}{\|1\|}$ $\qquad \|1\| = \sqrt{<1,1>} = \left(\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}}$

Donc $e_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad = \sqrt{1 - \frac{1}{3} - (-1) - \frac{1}{3}}$

$= \sqrt{2 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{3} - \frac{2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{4}{3}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

$<X, e_1> = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1} t(1-t^2)\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{1} t - t^3\,dt = 0$ car impair.

Donc $e_2' = X - <X, e_1> e_1 = X$

$\|e_2'\| = \sqrt{<X,X>} = \left(\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} t^2 - t^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{10-6}{15}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{15}}$

$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|} = \frac{\sqrt{15}}{2} X$

$<X^2, e_1> = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{15} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$

$<X^2, e_2> = \frac{\sqrt{15}}{2}\int_{-1}^{1} t^3(1-t^2)\,dt = 0$ car impair

$e_3' = X^2 - \frac{2\sqrt{3}}{15}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = X^2 - \frac{3}{15} = X^2 - \frac{1}{5}$

$\|e_3'\| = \left(\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{5}\right)\left(t^2 - \frac{1}{5}\right)(1-t^2)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$

$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}$

Excercice 5

1. Mq $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

Soit $x \in A$, donc $x \in B$

Soit $x' \in B^\perp$, donc $\langle x', x\rangle = 0$ i.e $x' \perp \underset{\in A}{x}$

donc $x' \in A^\perp$

$\Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

2) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

$\Rightarrow$)

Soit $x \in (A \cup B)^\perp$,

donc $\forall x' \in A$, $x' \in A \cup B$, $\langle x, x'\rangle = 0 \Rightarrow x \in A^\perp$
$\forall x'' \in B$, $x'' \in A \cup B$, $\langle x, x''\rangle = 0 \Rightarrow x \in B^\perp$

Donc $x \in A^\perp \cap B^\perp$

Alors $(A \cup B)^\perp \subset (A^\perp \cap B^\perp)$

$\Leftarrow$)

Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$

Donc $\forall x' \in A$ $\langle x, x'\rangle = 0$
$\forall x'' \in B$ $\langle x, x''\rangle = 0$
donc $x \in (A \cup B)^\perp$

Donc $A^\perp \cap B^\perp \subset (A \cup B)^\perp$

D'où $A^\perp \cap B^\perp = (A \cup B)^\perp$

3) $A \subset Vect(A) \Rightarrow Vect(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$

Donc il nous reste à mq $A^{\perp} \subset Vect(A)^{\perp}$

Soit $x \in A$ et $x' \in Vect(A)$
donc $x \in Vect(A)$

$x'' \in A^{\perp} \Rightarrow \langle x'', x \rangle = 0$

Or $x \in Vect(A)$, donc $x'' \in Vect(A)^{\perp}$

D'où $A^{\perp} \subset Vect(A)^{\perp}$

Donc $A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$

4) Mq $Vect(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$

$A \subset Vect(A)$

$Vect(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$

$(A^{\perp})^{\perp} \subset (Vect(A)^{\perp})^{\perp}$

Soit $x \in Vect(A)$ donc

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_n \in A$

tq $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

Soit $y \in A^{\perp}$. Donc $\forall x \in A^{\perp}$

$\langle y, x' \rangle = 0$
D'où $\langle x, y \rangle = \lambda_1 \langle a_1, y \rangle + \dots + \lambda_n \langle a_n, y \rangle = 0$

Donc tout $x \in Vect(A)$ est $\perp$ à $y \in A^{\perp}$
donc $x \in (A^{\perp})^{\perp}$
d'où $Vect(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$

5) Supposons que $\dim(E) < \infty$, donc $\dim A < \infty$

Mq $Vect(A) = (A^{\perp})^{\perp}$

D'après 4) $Vect(A) \subset (A^{\perp})^{\perp}$

Donc il suffit de montrer que $(A^{\perp})^{\perp} \subset Vect(A)$

Soit $x \in (A^{\perp})^{\perp}$ $\quad A^{\perp} = Vect(A)^{\perp}$

De plus $(A^{\perp})^{\perp} = A$ mais $A \subset Vect(A)$

D'où $Vect(A) = (A^{\perp})^{\perp} = A$

Exercice 6

$\Rightarrow$ Soit $x \in (F+G)^{\perp}$

Donc $\forall f \in F, g \in G$ $\langle f+g, x\rangle = 0$

$\underbrace{\langle f, x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle g, x\rangle}_{=0} = 0$

Donc $x \in F^{\perp}$ et $x \in G^{\perp}$

$\Rightarrow x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$

D'où $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$

$\Leftarrow$) Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$

Donc $\forall f \in F, g \in G$, $\langle f, x\rangle = 0$

$\langle g, x\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle = 0$

$= \langle f+g, x\rangle = 0$ par Bilinéarité

Donc $\forall f+g \in F+G$. $f+g \perp x$

Donc $x \in (F+G)^{\perp}$ d'où $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$

Donc $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

Montrons que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

$\Rightarrow$

Soit $x \in (F \cap G)^\perp$ $\qquad x \in F^\perp$, $x \in G^\perp$

$y \in (F \cap G)^\perp$ $\qquad y \in F^\perp$, $y \in G^\perp$

$x + y \in (F \cap G)^\perp$

donc $x + y \in F^\perp + G^\perp$

d'où $(F \cap G)^\perp \subset F^\perp + G^\perp$

$\Leftarrow$ Mq $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

Soit $x \in F^\perp + G^\perp$

donc $\exists f \in F^\perp$, $g \in G^\perp$ tq $x = f + g$

Soit $y \in E$ tq $\langle x, y \rangle = 0$

i.e $\langle f+g, y \rangle = 0$

$= \langle f, y \rangle + \langle g, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle f, y \rangle = -\langle g, y \rangle$

$\Rightarrow g = -f \Rightarrow g = f = 0$

ou $\langle f, y \rangle = 0$ et $\langle g, y \rangle = 0$

i.e $y \perp f$ et $y \perp g$ i.e

$y \in F$ et $y \in G \Rightarrow y \in G \cap F$

$\Rightarrow x \in (F \cap G)^\perp$

$\square$

Excercice 7

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A, B \in E$

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$$

1) $dim(E) = n^2$

2) $\langle A+\lambda A', B+\mu B'\rangle = Tr\left({}^t(A+\lambda A')(B+\mu B')\right)$

$= Tr\left(({}^tA + \lambda {}^tA')(B+\mu B')\right)$

$= Tr({}^tAB + \lambda {}^tA'B + \mu {}^tAB' + \lambda\mu {}^tA'B')$

$= Tr({}^tAB) + \lambda Tr({}^tA'B) + \mu Tr({}^tAB') + \lambda\mu Tr({}^tA'B')$

$= \langle A, B\rangle + \lambda\langle A', B\rangle + \mu\langle A, B'\rangle + \lambda\mu\langle A', B'\rangle$

Donc c'est bien un produit scalaire.

3) Mq $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$

Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$

Donc ${}^tA = -A$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tS = S$

$\langle A, S\rangle = Tr(-AS) = \sum_{i=1}^n z_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -a_{i,j}s_{j,i}$

$= \langle S, A\rangle = Tr(SA)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n s_{i,j}\underbrace{a_{j,i}}_{=-a_{i,j}}$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}s_{i,j} = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}s_{j,i}$

$= 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}s_{i,j} = 0 \Rightarrow \langle A, S\rangle = 0$

Donc $A \in S_n(\mathbb{R})^\perp$

D'où $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$

Mq $S_n(\mathbb{R})^\perp \subset A_n(\mathbb{R})$

Soit $B \in S_n(\mathbb{R})^\perp$

Donc $\forall S \in S_n(\mathbb{R}) \quad \langle S, B \rangle = \langle B, S \rangle = 0$

$Tr(SB) = Tr({}^tBS) = 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{j,i}\, b_{i,j} \qquad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}\, s_{j,i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, s_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{j,i}\, s_{j,i} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (b_{i,j} \quad) s_{j,i} = 0$$

$-b_{j,i}$

$\Rightarrow b_{i,j} = -b_{j,i} \Rightarrow b_{j,i} = -b_{i,j}$

$\Rightarrow B^t = -B$

Donc

$S_n(\mathbb{R})^\perp \subset A_n(\mathbb{R})$

Donc $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$

Exercice 8

$(E, \langle , \rangle)$ $\quad n \geq 2$

$E = \mathrm{Vect}(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{BON})$

$F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ avec $1 \leq r \leq n-1$

D'après le cours $\quad E = F \oplus F^\perp$

et $\forall x \in E$, $x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$
$= \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_r \rangle e_r + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$

de plus $\exists\ p_F(x) \in F$ et $p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$
tq $\quad x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$

Comme $\{e_i\}$ est BON, donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(\underbrace{e_{r+1}, \dots, e_n}_{\text{orthogonaux à } e_1, \dots, e_r})$

Donc $\exists\ a_1, \dots, a_n$ tq

$p_F(x) = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r$
$p_{F^\perp}(x) = a_{r+1} e_{r+1} + \dots + a_n e_n$

$x = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r + a_{r+1} e_{r+1} + \dots + a_n e_n = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = \langle x, e_i \rangle$

Donc $p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_r \rangle e_r$

Soit $y \in E$.

$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$

$\Rightarrow \|x - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$

Donc $\|x - p_F(x)\|$ est la plus petite norme.

$$\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\langle x - p_F(x), x - p_F(x)\rangle}$$

$$= \sqrt{\langle \sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i \,, \text{—} \rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, \sum_{j=r+1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j \rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i\rangle \sum_{j=r+1}^{n} \langle x, e_j\rangle \langle e_i, e_j\rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2}$$

Exercice 9

a) $x + 2y - 2z = 0$

$\Rightarrow x = -2y + 2z$

$\Rightarrow (-2y + 2z, y, z) \Rightarrow (-2, 1, 0)$
$(2, 0, 1)$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2}$ une base de P.

$w_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \|w_1'\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\langle e_2, u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (-4) = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$w_2' = e_2 - \langle e_2, u_1\rangle u_1$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \|w_2'\| = \frac{1}{5}\sqrt{4+16+25}$

$= \frac{1}{5}\sqrt{45} = \frac{1}{5}\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

Donc $u_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

Donc $(u_1,u_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}\right)$

a) b)
$$\begin{cases} x+2y-2z=0 \\ x'+2y'-2z'=0 \\ xx'+yy'+zz'=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x'^2+y'^2+z'^2=1 \end{cases}$$

b) $\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}_{:=u_3}\right)$

$\|u_3\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = \frac{3}{3} = 1$ donc vecteur est normalisé.

$\langle u_1,u_2\rangle = \frac{1}{3\sqrt{5}}\left\langle\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot 0 = 0$

$\langle u_2,u_3\rangle = \frac{1}{3\sqrt{5}}\left\langle\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{9\sqrt{5}}(2+8-10) = 0$

Donc $\mathcal{B}(u_1,u_2,u_3)$ est une des vecteurs normalisés et 2 à 2 orthogonaux, donc famille libre.

$\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc c'est une BON de $\mathbb{R}^3$

Comme $\mathcal{B}$ est une BON, donc il suffit de calculer les produit scalaire:

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2+1) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2\right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2+4+5) = \frac{11}{3\sqrt{5}}$

$\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, u_3\right\rangle = \frac{1}{3}(1+2-2) = \frac{1}{3}$

Donc $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{11}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

$E = P \oplus P^{\perp} = Vect(u_1,u_2) \oplus Vect(u_3)$

$u = \underbrace{a_1u_1 + a_2u_2}_{} + a_3u_3$

$= p_P(u) + \underbrace{(u - p_u(P))}_{p_{P^\perp}(u)}$

Donc $p_P(u) = -\frac{1}{\sqrt{5}}u_1 + \frac{11}{3\sqrt{5}}u_2$

Donc la distance est: $\left\| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{9}\sqrt{1+4+4} = 1$

Donc la distance de u à P est: 1

Exercice 11

$\Rightarrow$)

Supposons que p est une projection orthogonale de E.

Donc $\exists p'$ tq $\forall x \in E$ $p'(x) \in F^{\perp}$

et $x = p(x) + p'(x)$

$\Rightarrow \|x\| = \|p(x) + p'(x)\| \leq \|p(x)\| + \|p'(x)\|$ par l'ineg. triangulaire.

Si p orthogonale, donc par le thm de Pythagore

$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|p'(x)\|^2$

$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \|p(x)\|^2 \Rightarrow \|x\| \geq \|p(x)\|$ ◦

$\Leftarrow$) Supposons que $\forall x$ $\|p(x)\| \leq \|x\|$

Notons $p'(x) = x - p(x)$

Il faut mq $p(p(x)) = p(x)$

$p(x) = p^*(x)$

$\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot \rangle}$

Donc $\sqrt{\langle p(x), p(x) \rangle} \leq \sqrt{\langle x,x \rangle}$

$\Rightarrow \langle p(x), p(x) \rangle \leq \langle x,x \rangle$

$\langle p(x), x \rangle = \langle x, p^*(x) \rangle$

$\langle p(p(x)), p(x) \rangle = \langle p(x), p^*(p(x)) \rangle$

$= \langle p(x), p(x) \rangle \leq \langle x,x \rangle$

$\langle p(x), p^*(p(x)) \rangle \leq \langle x,x \rangle$

$\|p(p(x)) - p(x)\| \leq \|p(p(x))\| + \|p(x)\|$

Exercice 12

$y \in E$, $\|y\| = 1$

$\forall x$, $f(x) = x - 2\langle x, y\rangle y$

Isométrie : $\langle f(x), f(z)\rangle = \langle x, z\rangle$

$$\langle f(x), f(z)\rangle = \langle x - 2\langle x,y\rangle y, z - 2\langle z,y\rangle y\rangle$$

$$= \langle x, z - 2\langle z,y\rangle y\rangle - 2\langle x,y\rangle\langle y, z - 2\langle z,y\rangle y\rangle$$

$$= \langle x,z\rangle - 2\langle z,y\rangle\langle x,y\rangle - 2\langle x,y\rangle\langle y,z\rangle + 4\langle x,y\rangle\langle z,y\rangle\underbrace{\langle y,y\rangle}_{=1}$$

$$= \langle x,z\rangle$$

Donc f est une isométrie

$f(y) = -y$