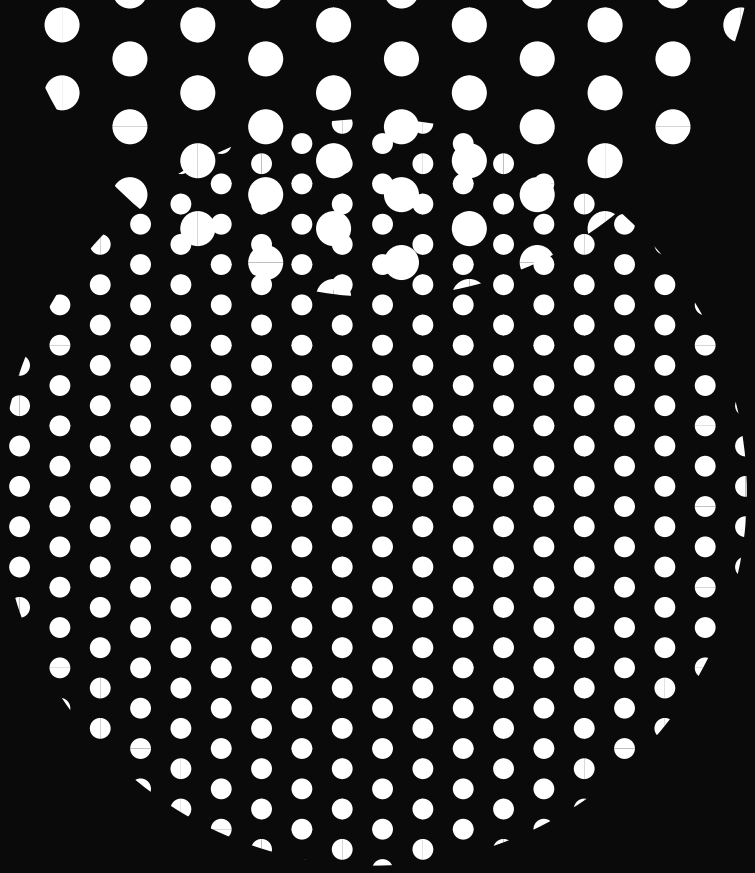

Exercice 5

1 => 3 Supposons que $\ker f = \ker(f^2)$

Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$

Donc $f(x) = 0$ de plus $\exists y \in E$ tq $f(y) = x$

$f(f(y)) = f(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker f^2$ comme $\ker f^2 = \ker f$ donc $y \in \ker f$ donc $f(y) = 0$

$\Rightarrow x = \vec{0}$ $\Rightarrow \ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$

donc $\dim(\ker f \oplus \operatorname{Im} f) = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = E$

$\Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$

3 => 2

Supposons que $E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$

Soit $y \in \operatorname{Im} f$ donc $\exists x \in E$ tq $f(x) = y$

De plus $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{\vec{0}\}$

donc $x \in E$ donc $x = \underset{\in \ker f}{u} + \underset{\in \operatorname{Im} f}{v}$

$y = f(x) = f(v) \Rightarrow y \in \operatorname{Im} f^2$

Donc $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} f^2$

Soit $y \in \operatorname{Im} f^2$ donc $\exists x \in E$ tq $y = f^2(x) = f(f(x))$, $f(x) = u \in \operatorname{Im} f$

$f(u) = y \in \operatorname{Im} f$ donc $\forall y \in \operatorname{Im} f^2, y \in \operatorname{Im} f$ donc $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} f^2$

Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$

2 => 1

Supposons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$

Soit $y \in \text{Im } f^2$ Donc $\exists x \in E$ tq $f^2(x) = y$

$\in \text{Im } f$

$\Rightarrow f(f(x)) = y$

$\Rightarrow \exists v \in E \quad f(v) = y$

$v = f(x)$

$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}\}$

$\text{Ker } f^2 = \{x \in E \mid f^2(x) = \vec{0}\}$

$f(f(x)) = \vec{0}$

$\exists y \in E \quad f(y) = \vec{0} \Rightarrow \text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$

$\text{Ker } f = \{x \in E \mid f(x) = \vec{0}\}$

$\vec{0} \in \text{Im } f = \text{Im } f^2$

$\exists z \in E \quad f^2(z) = 0 = f \Rightarrow \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$

Donc $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$

Exercice 4

Soient a, b

1 => 3 soit $a \neq b \in K$

Supposons $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$

i.e $\exists x \in E \quad (f - aI)(f(x) - bx) = 0$

$\Rightarrow f(f(x) - bx) - a(f(x) - bx) = 0$

$\Rightarrow f^2(x) - bf(x) - af(x) + abx = 0$

Soit $y \in \ker(f - aId) \cap \ker(f - bId)$

Donc $\begin{cases} f(y) - ay = 0 \\ f(y) - by = 0 \end{cases} \Rightarrow ay = by$

$\Rightarrow y(-a+b) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $\underbrace{-a+b=0}_{\text{impos par hyp}}$

$\Rightarrow y = \vec{0}$

Donc $\ker(f - aId) \cap \ker(f - bId) = \{0\}$

$\forall x \in E \quad (f - aId) \circ (f - bId)(x) = \vec{0}$

Soit $x \in \ker(f - bId)$

donc $(f - bId)(x) = \vec{0}$
et $(f - aId)(\vec{0}) = \vec{0}$ Bon

Soit $x \notin \ker(f - bId)$

donc $\exists y \in E$ tq $(f - bId)(x) = y = f(x) - bx$

$(f - aId) \circ (f - bId)(x) = (f - aId)(y) = \vec{0}$

$\Rightarrow f(y) - ay = 0 \Rightarrow f(y) = ay$

$f^2(x) - bf(x) = af(x) - abx$

$\Rightarrow f(x)(f(x) - b) = a(f(x) - bx)$