



exercice 3

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt$$

a) $\dim(\mathcal{R}_n[X]) = n+1$

b) $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt = \int_{-1}^1 Q(t)P(t)(1-t^2)dt = \langle Q, P \rangle$

$$t^2 \leq 1 \quad \text{donc } (1-t^2) \geq 0 \quad \forall P, P(t)P(t) \geq 0$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positive.

$\langle P, Q \rangle$ est bilinéaire car l'intégrale est linéaire.

$$\langle P, P \rangle = 0 = \int_{-1}^1 P(t)^2(1-t^2)dt \Rightarrow P=0$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

c) $n=2 \quad (1, X, X^2)$

$$\|1\| = \left(\int_{-1}^1 (1-t^2)dt \right)^2 = \sqrt{\left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1} = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{2 - \frac{2}{3}} \\ = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc } e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_2 = X - \langle X, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= X - \frac{3}{4} \langle X, 1 \rangle$$

$$\langle X, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t(1-t^2)dt = \int_{-1}^1 t - t^3 dt = 0 \quad \text{car symétrique}$$

$$= X$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2(1-t^2)dt} = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 - t^4 dt} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)}$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{15}}{2} X$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{2}{5}} \\ = \sqrt{\frac{10-6}{15}} \\ = \sqrt{\frac{4}{15}} \\ = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$w_3 = X^2 - \langle X^2, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle \frac{\sqrt{3}}{2} - \langle X^2, \frac{\sqrt{5}}{2} X \rangle \frac{\sqrt{5}}{2} X$$

$$= X^2 - \langle X^2, 1 \rangle \frac{3}{4} - \langle X^2, X \rangle \frac{15}{4} X$$

$$\langle X^2, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t^2(1-t^2) dt = \int_{-1}^1 t^2 - t^4 dt = \frac{4}{15}$$

$$\langle X^2, X \rangle = \int_{-1}^1 t^3(1-t^2) dt = \int_{-1}^1 t^3 - t^5 dt = 0 \quad \text{car symétrique}$$

$$\text{donc } w_3 = X^2 - \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{4} = X^2 - \frac{3}{15} = X^2 - \frac{1}{5}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{5})(t^2 - \frac{1}{5})(1-t^2) dt}$$

$$= \sqrt{\int_{-1}^1 -t^6 + \frac{7}{5}t^4 - \frac{11}{25}t^2 + \frac{1}{25} dt} = \sqrt{\left[-\frac{t^7}{7} + \frac{7}{25}t^5 - \frac{11}{25}t^3 + \frac{1}{25}t \right]_{-1}^1}$$

$$= \left(t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{25} \right) (1-t^2) = \sqrt{\left(-\frac{1}{7} + \frac{7}{25} - \frac{11}{25} + \frac{1}{25} \right) - \frac{1}{7}}$$

$$= \frac{t^4 - \frac{2}{5}t^2 + \frac{1}{25} - t^6 + \frac{2}{5}t^4 - \frac{1}{25}t^2}{+ \frac{7}{25} - \frac{11}{25}t^3 + \frac{1}{25}} = \sqrt{-\frac{2}{7} - \frac{8}{25} - \frac{22}{25}}$$

$$= -t^6 + \frac{7}{5}t^4 - \frac{11}{25}t^2 + \frac{1}{25} \quad \sqrt{-\frac{2}{7} - \frac{46}{25}}$$

$$c_3 = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{7} - \frac{46}{25}}} (X^2 - \frac{1}{5})$$

d) Le degré est n.

$$\text{car } p_n = X_n - \dots$$

où $\deg(X_n) = n$ $\deg < n$

Exercice 5

1. Soit $A \subset B$, mg $B^\perp \subset A^\perp$

Soit $a \in A$, donc $a \in B$.

$\forall b' \in B^\perp$, $\langle b', a \rangle = 0$ car $a \in B$.
donc $b' \in A^\perp$ alors
 $B^\perp \subset A^\perp$

2.

Soit $x \in A \cup B$
donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Si $x \in A$, donc $\forall a' \in A^\perp$ $\langle x, a' \rangle = 0$
donc $x \in A^\perp$

Si $x \in B$, donc $\forall b' \in B^\perp$ $\langle x, b' \rangle = 0$
donc $x \in B^\perp$

donc $x \in A^\perp \cap B^\perp$

$$(A \cup B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$$

Soit $x \in A^\perp \cap B^\perp$
donc $\forall a \in A$, $\langle x, a \rangle = 0$
 $\forall b \in B$, $\langle x, b \rangle = 0$

alors $x \in (A \cup B)^\perp$

$$\text{Donc } (A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$$

Exercice 6

Soit $x \in F + G$, donc $\exists f, g \in F + G$ $x = f + g$

Soit $y \in (F + G)^\perp$, donc $\langle y, x \rangle = 0$
 $= \langle y, f \rangle + \langle y, g \rangle = 0$

$$\langle y, f \rangle = -\langle y, g \rangle \Rightarrow f = -g \Rightarrow x = 0 \quad \text{absurde}$$

$$\text{donc } \langle y, f \rangle = 0 \text{ et } \langle y, g \rangle = 0.$$

Donc $y \in F^\perp$
et $y \in G^\perp$ donc $y \in F^\perp \cap G^\perp$

$$\text{Alors } (F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$$

$$\text{Soit } x \in F^\perp \cap G^\perp$$

$$\text{Donc } \forall f \in F, \langle x, f \rangle = 0$$

$$\forall g \in G, \langle x, g \rangle = 0$$

$$\langle x, f \rangle + \langle x, g \rangle = \langle x, f + g \rangle = 0$$

$$\text{Donc } x \in (F + G)^\perp$$

$$\text{Par conséquent, } (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

2.

Exercice 7.

a) $\dim(E) = n^2$

b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire.

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= T_2(A^t B) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} b_{j,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{j,i} a_{j,i} \\ &= T_2(B^t A)\end{aligned}$$

donc Symétrique

$\langle A, A \rangle$ définie positive.

$$\langle A, A \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{j,i})^2 = 0 \Rightarrow a_{j,i} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

$$\subseteq S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^t A = A\}$$

$$A_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}), {}^t M = -M\}$$

$$\mathcal{U}_q \quad A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$$

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, donc

$\forall A \in A_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle S, A \rangle &= T_2({}^t S A) \\ &= T_2(S A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{k,i} a_{i,k} \\ &= T_2({}^t A S) \\ &= T_2(-A S) = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,i} = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,i} = 0.\end{aligned}$$

Alors $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$.

Soit $Q \in S_n(\mathbb{R})^\perp$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \langle S, Q \rangle &= 0 = T_2({}^t S Q) = T_2(S Q) = T_2(Q S) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{i,k} q_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{k,i} s_{k,i}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{i,k} q_{i,k}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{i,k} q_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{i,k} (-q_{i,k})$$

$$\text{i.e. } {}^t Q = -Q \quad \text{donc } Q \in A_n(\mathbb{R}) \text{ cf } S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$$

Exercice 9

$$a) P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 0\}$$

$$(a) \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 0 \quad \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$e_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{1+1+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 \rangle}_{=0} e_2 - \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 \rangle}_{=0} e_1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exercice 11

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ sa base orthonormée. Alors $\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$

Soit $F \subseteq E$ un s.s.e.v et p projecteur orthogonal sur F , donc $\exists i_1, \dots, i_q \quad 1 \leq i_j \leq n \quad F = \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$

$$\text{Donc } p(x) = \sum_{i=1}^q \langle x, e_{i_j} \rangle e_{i_j} \quad \text{d'où } \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Supposons que $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

Soit $y \in \text{Im}(p)$ et $z \in \text{Ker}(p)$

Alors $x \in E, x = y + tz$, avec $t \in \mathbb{R}$, on a $p(x) = y$

On a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ i.e $\|y\| \leq \|y + tz\|$

Notons $f(t) = y + tz$ avec $t \in \mathbb{R}$

$$\|y\| \leq \|y + tz\| \Rightarrow \|y\|^2 \leq \|y + tz\|^2 = \|y\|^2 + 2t\langle y, z \rangle + t^2\|z\|^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2t\langle y, z \rangle + t^2\|z\|^2$$

*il faut
que ça soit toujours ≥ 0
étudions, quand c'est vrai*

$\Delta = 4t^2\langle y, z \rangle^2$, si $\Delta > 0$, il y'a des cas

où $2t\langle y, z \rangle + t^2\|z\|^2 < 0$, donc il faut que

$\Delta \leq 0$, alors pour que $\Delta = 0$, $\langle y, z \rangle = 0$

Donc $\text{Im}(p) \perp \text{Ker}(p)$, donc p est orthogonale.

Exercice 12

$$\|f(x)\| = \|x - 2\langle x, y \rangle y\|$$

$$= \sqrt{\langle x - 2\langle x, y \rangle y, x - 2\langle x, y \rangle y \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle - 2\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + 4\langle x, y \rangle^2 \langle y, y \rangle}$$

$$= \sqrt{\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle^2 - 2\langle x, y \rangle^2 + 4\langle x, y \rangle^2}$$

$$= \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|$$

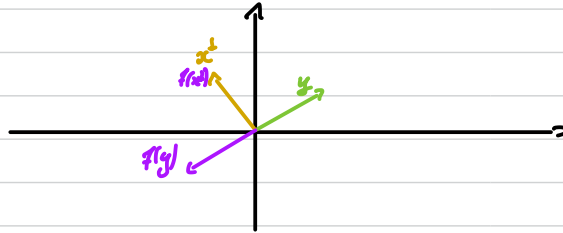
Donc f est une isométrie.

Supposons $x \in E$ tq $x \perp y$, donc

$$f(x) = x - 2 \underbrace{\langle x, y \rangle}_0 y = x$$

Donc les vecteurs perpendiculaires à y
sont invariants par f

$$f(y) = y - 2y = -y$$



Donc f est une réflexion par rapport à l'espace
orthogonale à y .

Exercice 14

$$\begin{aligned} 1. \quad \|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\ &= \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(y), f(x) \rangle - \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle + \|f(y)\|^2 \end{aligned}$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|x - y\| \\ \|f(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad -2\langle f(x), f(y) \rangle &= -2\langle x, y \rangle \\ \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale,
alors $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ et $\forall j \neq i \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0$

$$\forall i \neq j \quad \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \forall i \quad \langle f(e_i), f(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1.$$

Donc $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale.

3) Or $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthogonale, donc

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad f(x) &= \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i) \end{aligned}$$

Donc soit $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= \sum_{i=1}^n \langle x + \lambda y, e_i \rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i) + \lambda \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i) + \lambda \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle f(e_i) \\ &= f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

$$f(0) = \sum_{i=1}^n \langle 0, e_i \rangle f(e_i) = 0$$

Donc f est linéaire.

Exercice 16

$$\alpha x = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i \right) e_j$$

↖ vecteurs de la base canonique

$$\text{Notons} \quad \langle x, y \rangle_T = \frac{1}{|T|} \sum_{\alpha \in T} \langle \alpha x, \alpha y \rangle$$

$$\text{Alors on a:} \quad \langle \beta x, \beta y \rangle_T = \frac{1}{|T|} \sum_{\alpha \in T} \langle \alpha(\beta x), \alpha(\beta y) \rangle$$

notons $\gamma = \alpha\beta \in T$ car T groupe, donc

$$\langle \beta x, \beta y \rangle_T = \frac{1}{|T|} \sum_{\gamma \in T} \langle \gamma x, \gamma y \rangle = \langle x, y \rangle_T$$