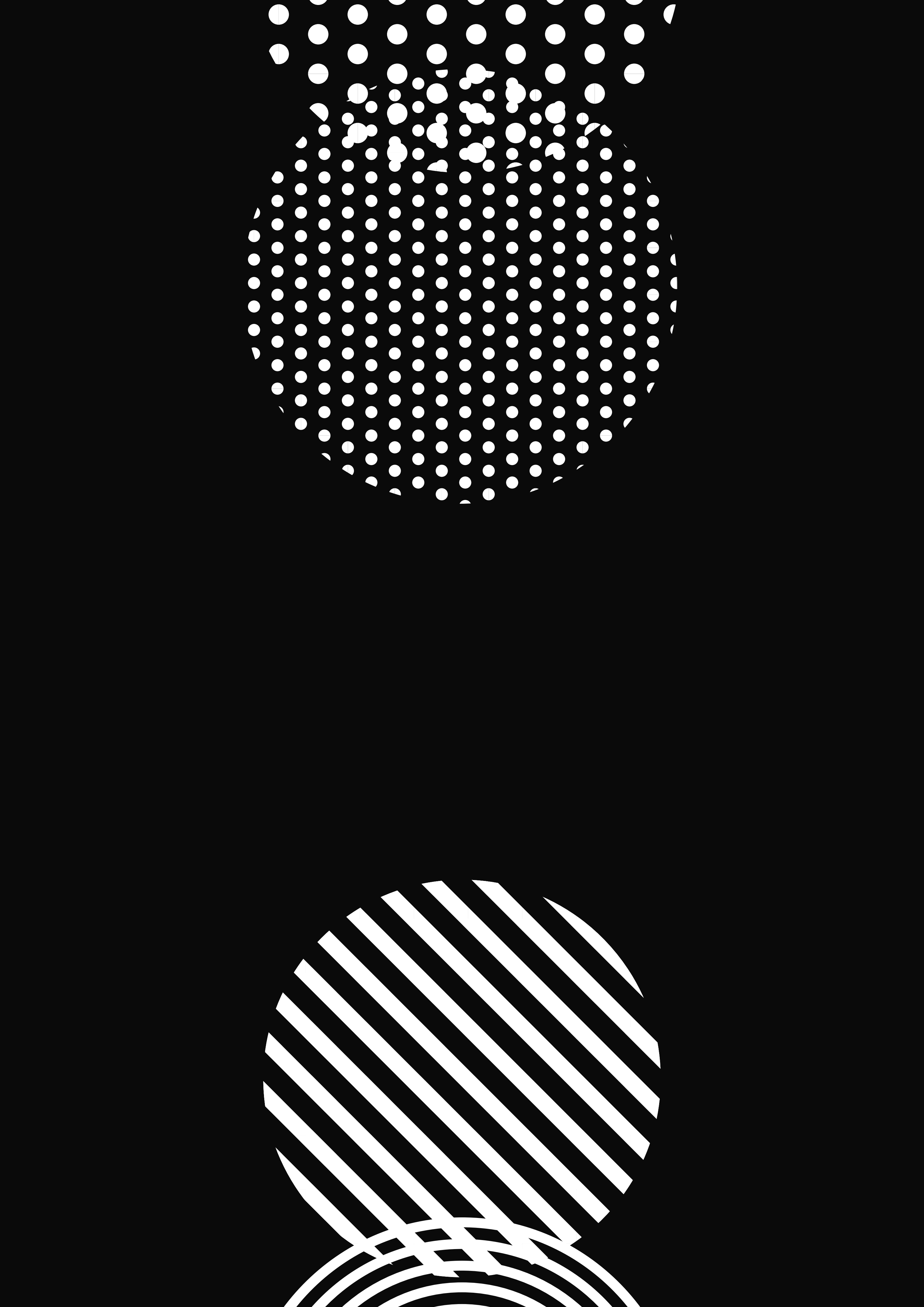

Exercice 1

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont indépendantes

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc il est lié.

Alors, $\text{rang}(A) = 2$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de l'image.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = z$
$y - z = 0 \qquad\qquad y = z$

Donc (z, z, z) $z \in \mathbb{R}$ est une solution et alors ce vecteur appartient à Ker.

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base de Ker.

1. (a) $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{r,i} b_{i,r}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} c'_{i,i} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{r,i} a_{i,r}$

(b) Non, car $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$

2. $c_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} a_{i,r} b_{r,j}$

supposons que $i > j$ alors, si $r < i$, $a_{i,r} = 0$, si $r = i$, $r > j$

donc $b_{r,j} = 0$

idem $r > i$, $b_{r,j} = 0$

Exercice 3.

2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.s.

a) D'après 2.2 le résultat de la multiplication des matrices triangulaires supérieur est aussi une matrice triangulaire supérieure.

Alors $\forall\, T \in T_n,\ f(T) \in T_n$

Donc $f(T_n) \subset T_n$

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n+1}{1}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

b) Supposons A inversible, alors $\exists A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A^{-1}A = I_n$

$\operatorname{Ker}(\tilde{f}) = \{B \in T_n : AB = 0\}$

$$AB = 0 \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}0$$
$$\Rightarrow B = 0$$

Donc $\operatorname{Ker}(\tilde{f}) = 0$ et $\tilde{f}$ endomorphisme, alors $\tilde{f}$ bijective.

c) Soit $B \in T_n$

$AB = Q$ or $\tilde{f}(T_n) \subset T_n$ donc $Q \in T_n$

Or $\tilde{f}$ surjective, $\exists X \in T_n$ tq $\tilde{f}(X) = I_n$

i.e $AX = I_n$
donc $X = A^{-1}$ donc $A^{-1} \in T_n$

Exercice 4

1. 1) $\Rightarrow$ 3)

Supposons que $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$

Soient $a \neq b$

Supposons que $x \in Ker(f - aI)$
et $x \in Ker(f - bI)$

donc $\begin{cases} f(x) = ax \\ f(x) = bx \end{cases}$ i.e $ax = bx$ $\Rightarrow x = \vec{0}$

donc $Ker(f - aI) \cap Ker(f - bI) = \{\vec{0}\}$

Soit $x \in E$, posons $u := f(x) - bx$ $\in Im(f - bI)$

donc $u \in Ker(f - aI)$ et $f(u) = 0$

posons $v = f(x) - ax$ $\in Im(f - aI)$
et $v \in Ker(f - bI)$

$u - v = ax - bx$

$\Rightarrow u - v = x(a - b)$

$\Rightarrow x = \underbrace{\frac{u}{a-b}}_{\in Ker(f-bI)} + \underbrace{\frac{v}{b-a}}_{\in Ker(f-aI)}$

Donc $E = Ker(f - bI) \oplus Ker(f - aI)$

2) 3) $\Rightarrow$ 2)

Supposons $Ker(f - aI) \oplus Ker(f - bI) = E$

Posons $n = \dim \nearrow$ $q \dim \nearrow$

Donc $\forall x \in E$ $f(x) = ax$
$f(x) = bx$

Donc $\mu = n + q$ et $f = \begin{pmatrix} aI_n & 0 \\ 0 & bI_q \end{pmatrix}$

3) $2 \Rightarrow 1$

Supposons que $\underset{F}{\underset{\parallel}{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}} = \begin{pmatrix} aI_n & 0 \\ 0 & bI_q \end{pmatrix}$

$$FX - bX = \begin{pmatrix} (a-b)I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} (a-b)\ldots_n \\ 0 \end{pmatrix} =: Q$$

$$(F - aI_n)Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (b-a)I_q \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc on obtient $(f - aI) \circ (f - bI) = 0$

Exercice 5

$1 \Rightarrow 3$) supposons $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ donc $\exists y \in E$ tq $f(y) = x$

et $f(x) = 0$ i.e $f(f(y)) = 0$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f^2)$ or

$\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\underset{=0}{f(y)} = x$

Donc $x = 0$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$

$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim E$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\vec{0}\}$

donc $\underline{\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f = E}$

$3 \Rightarrow 2$ Supposons $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$

Soit $x \in E$, $y = \underset{\neq \vec{0}}{f(x)} \in \mathrm{Im}\, f$

$f(y) =: \underset{\in \mathrm{Im}(f)}{z} \neq \vec{0}$ $\quad f(f(x)) \in \mathrm{Im}(f)$

donc $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$

Soit $y \in \text{Im} f$ donc $\exists u \in E$ tq $f(u) = y$

$u = \underbrace{x}_{\in \text{Im} f} + \underbrace{v}_{\in \text{Ker} f}$ $\quad f(u) = f(x) + f(v) = f(x)$

donc $y = f(f(x))$ donc $y \in \text{Im} f^2$

Donc $\text{Im} f = \text{Im} f^2$

<u>2 => 1</u>

~~Supposons $\text{Im} f = \text{Im} f^2$~~

~~Soit $y \in \text{Im}(f)$ $\neq \vec{0}$ donc $\exists u \in E$ tq $f(u) = y$~~
~~$\exists x \in E$ tq $u = f(x)$~~

~~Donc $y = f(u) = f^2(x)$~~

~~Evidemment $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker} f^2$~~

~~mq $\text{Ker} f^2 \subset \text{Ker} f$~~

~~Soit $u \in \text{Ker} f^2$ donc $f(f(u)) = \vec{0} \in \text{Im} f^2 = \text{Im} f$~~
~~Donc $\underbrace{f(u)}_{=: y} \in \text{Ker} f$ mais aussi $y \in \text{Im} f$ donc $y \in \text{Im} f^2$~~

~~donc $\exists q \in E$ tq $f^2(q) = y$~~

~~Notons $q = f(u)$ $\quad q \in \text{Ker} f$ car $f(q) = \vec{0}$~~
~~mais aussi $q = \text{Im} f$ donc $q \in \text{Im} f^2$~~

~~Donc $\exists z$ tq $q = f^2(z) \Rightarrow u = f(z)$~~

$$\begin{aligned}
\dim \text{Ker} f &= \dim E - \dim \text{Im} f \\
&= \dim E - \dim \text{Im} f^2 \\
&= \dim \text{Ker} f^2
\end{aligned}$$

Exercice 8