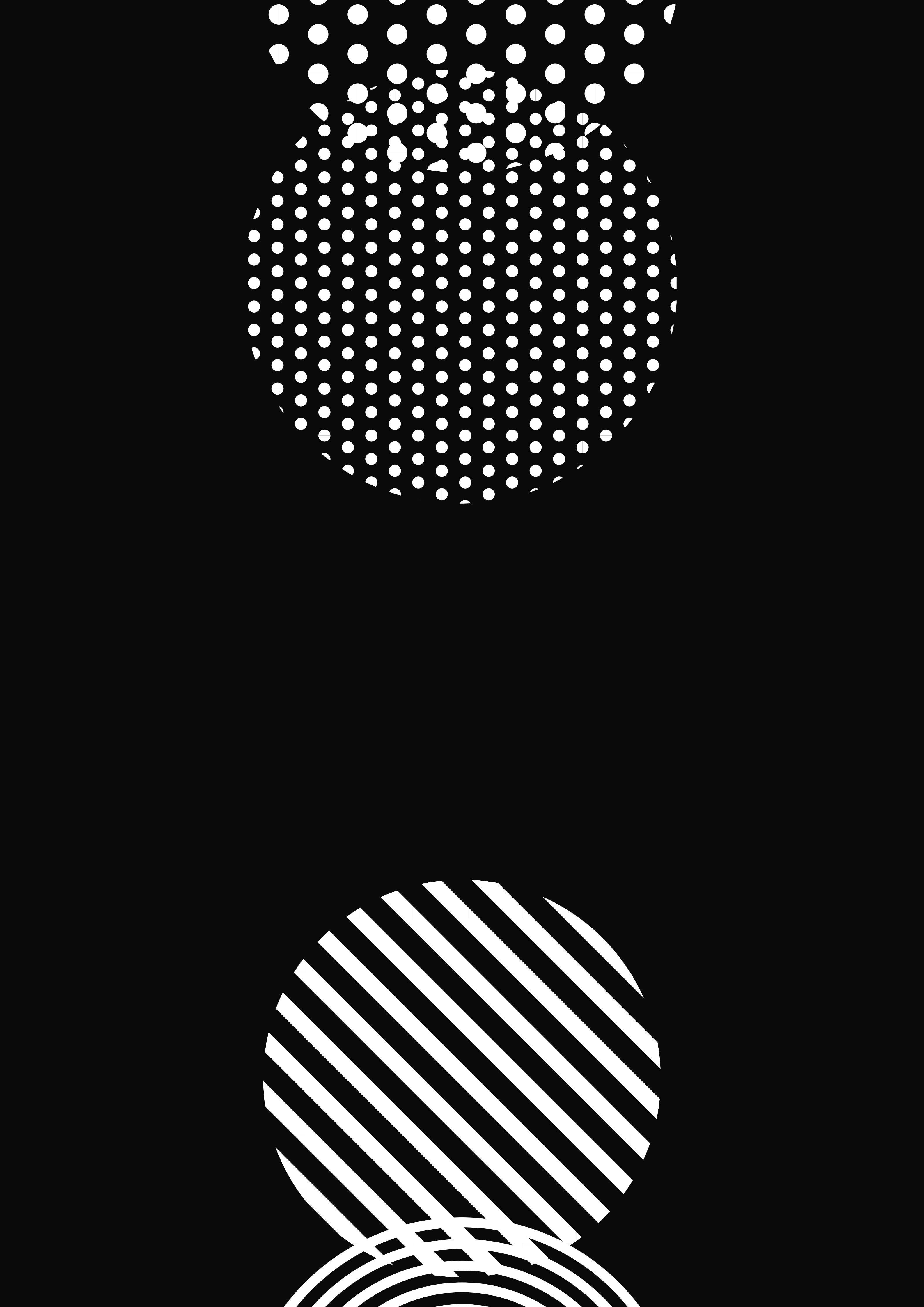

Exercice 4

1) $P(t) = \|x + ty\|^2 - \|x^2\| = \|x^2\| + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2 - \|x\|^2$

$= 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2$

2) Supposons que x et y sont orthogonaux

donc $\|x+ty\|^2 - x^2 = t^2\|y\|^2 \geq 0 \quad \forall t$

i.e $\|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 \quad \forall t$

$\Rightarrow \|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2 \quad \forall t$

3) Soient x, y tq

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|x+ty\| \geq \|x\|$

$\Rightarrow \|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2$

$\Rightarrow \|x+ty\|^2 - \|x\|^2 \geq 0$

$\Rightarrow 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2 \geq 0$

$\Delta = 4\langle x,y\rangle^2$

Donc, pour que $P(t) \geq 0 \ \forall t$, il faut que Δ soit négatif ou nul. Or $\Delta = 4\langle x,y\rangle^2$ (i.e toujours positif), donc $\Delta = 0 = 4\langle x,y\rangle^2 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0$

Donc x, y sont orthogonaux

Exercice 5

1) Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$

$\forall f,g \in E \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0)$

$\forall f,g \in E$, $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$ car la multiplication est commutative.

$\forall f,g,q \in E, \lambda \in \mathbb{R}$, $\langle f+\lambda q, g\rangle = \int_0^1 (f'(t) + \lambda q'(t))g'(t) + (f(0) + \lambda q(0))g(0)$

$= \int_0^1 f'(t)g'(t) + f(0)g(0) + \lambda\left(\int_0^1 q'(t)g'(t) + q(0)g(0)\right)$

$= \langle f,g\rangle + \lambda\langle q,g\rangle$

Donc $\langle , \rangle$ est bilinéaire car de plus symétrique.

$\forall f \in E \quad \langle f, f\rangle = \int_0^1 (f'(t))^2\,dt + f(0)^2 \geq 0$ car carrée

$\langle f, f\rangle = 0 = \int_0^1 (f'(t))^2 + f(0)^2$ or toujours positif donc

$\underbrace{f'(t) = 0}_{\text{signifie que } f \text{ constante}}$ et $\underbrace{f(0) = 0}_{\hookrightarrow}$ constante 0, donc $f = 0$

Donc $\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.

2) Soit $\varphi \in E$ tq $\varphi(t) = t + 1$ pour $t \in [0, 1]$

a) $N_2(\varphi) = \sqrt{\langle \varphi, \varphi\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1\,dt + \varphi(0)}$

$= \sqrt{\int_0^1 1\,dt + 1}$

$= \sqrt{[t]_0^1 + 1}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

b) Soit $f \in E$,

$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^1 f'(t)\,dt + f(0)$

$= [f(t)]_0^1 + f(0) = f(1) - \cancel{f(0)} + f(0) = f(1)$

c) Par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|$

$\Rightarrow |f(1)| \leq \sqrt{2}\sqrt{\int_0^1 f'^2(t)\,dt + f(0)^2}$

d) Égalité : quand f et φ sont colinéaire