



Exercice 1

d'application est bijective si son déterminant est non nul.

$$\text{Alors, } \det M_a = a \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(2 - 1) - (1 - (-3))$$

$$= a - 4$$

$$a - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$$

Alors M_a est bijective si $a \neq 4$

Exercice 2.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_1 \in \mathcal{H} \quad \text{car} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \quad \text{car} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$w_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - (-1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\|w_2'\| = \frac{1}{2} \sqrt{1+1+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$v_2 = \frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{H} \quad w_3 \perp v_1 \quad \text{et} \quad w_3 \perp v_2$$

Donc il nous reste à normaliser w_3

$$\|w_3\| = \sqrt{3}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$2) \quad v_1 = (e_1 - e_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad v_2 = (e_1 + e_2 - 2e_3) \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

Comme B et B' sont orthonormales, alors P est aussi orthogonale

Or P orthonormale, donc $P^{-1} = {}^t P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1, v_1 \rangle v_1 + \langle e_1, v_2 \rangle v_2 \\ \langle e_2, v_1 \rangle v_1 + \langle e_2, v_2 \rangle v_2 \\ \langle e_3, v_1 \rangle v_1 + \langle e_3, v_2 \rangle v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \langle e_1, v_1 \rangle v_1 + \langle e_1, v_2 \rangle v_2 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{temp. } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =: A'$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5] On a $H^\perp = \text{Vect}(f)$ i.e. $\text{Vect}(v)$

Donc distance de v à A est $\|v\| = \sqrt{3}$

6]

$$A'w = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|w - A'w\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Exercice 3

$$F = C([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall f, g \in F \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

$$P \subset F \quad \text{et} \quad P = \{f \in F : \forall t \in [-1, 1], f(-t) = f(t)\}$$

$$J = \{f \in F : \forall t \in [-1, 1], f(-t) = -f(t)\}$$

1] Si $\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0$ alors $f(-t) = -0 = -f(t)$
 $= 0 = f(t)$

donc l'élément nul appartient à chaque des espaces.

$$\forall f, g \quad \begin{aligned} \gamma(t) &= f(t) + g(t) & \gamma(-t) &= f(-t) + g(-t) \\ & & &= f(t) + g(t) = \gamma(t) \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \gamma \in P$$

$$\text{idem} \quad \gamma(t) = \lambda f(t)$$

$$\begin{aligned} \gamma(-t) &= \lambda f(-t) = \lambda f(t) \in P \\ &= \gamma(t) \end{aligned}$$

$$\text{Idem} \quad \gamma(t) = f(t) + \lambda g(t) \quad \begin{aligned} \gamma(-t) &= f(-t) + \lambda g(-t) = -f(t) - \lambda g(t) = -(f(t) + \lambda g(t)) \\ &= -\gamma(t) \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \gamma \in J$$

2] $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ car multiplication est commutative

$$\forall f \in F \quad \langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 (f(t))^2 dt \quad \text{donc}$$

$$\forall f \in F \quad \langle f, f \rangle \geq 0 \quad \text{car carré.}$$

$$\text{Supposons} \quad \langle f, f \rangle = 0 = \int_{-1}^1 f(t)^2 dt$$

$$\text{or } f \text{ est pair, } \int_{-1}^1 f(t)^2 dt = 0 \quad \text{Si } f(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinéaire car l'intégrale est linéaire

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

3) Soient $p \in P$ et $i \in \mathcal{I}$

$$\langle p, i \rangle = \int_{-1}^1 p(t) i(t) dt = \int_0^1 p(u) i(u) du + \int_0^1 p(t) i(t) dt$$

$$= -\int_0^1 p(u) j(u) du + \int_0^1 p(t) i(t) dt = 0$$

Notons $u = -t$

$$t = -u$$

$$du = -dt \Rightarrow dt = -du$$

Donc $\forall (p, i) \in (P, \mathcal{I})$, $\langle p, i \rangle = 0$

alors P et $\mathcal{I}$ sont orthogonales

4) Soit $f \in \mathcal{I} \cap P$

$$\text{donc } \forall t \in [-1, 1] \quad f(-t) = f(t) = -f(t) \Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$$

$$\text{Donc } \mathcal{I} \cap P = \{0\}$$

Il nous reste à montrer que $\mathcal{I} + P = F$

$$\text{Soit } f \in F, \quad \text{on peut écrire } f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_p + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_i$$

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = p(x) \in P$$

$$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x) \in \mathcal{I}$$

donc $\mathcal{I}$ et P sont supplémentaires dans F

Exercice 4

1) Soient $u, v \in E$ tq $u + v \perp u - v$

$$\text{alors } \langle u + v, u - v \rangle = 0$$

$$= \langle u, u - v \rangle + \langle v, u - v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

$$= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|u\| = \|v\|$$

2) Soit $\lambda > 0$ On suppose que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$

$\Rightarrow$

$$\text{donc } \|f(x) + f(y)\| = \lambda \|x + y\|$$

$$\|f(x) + f(y)\|^2 = \underbrace{\|f(x)\|^2}_{\lambda^2 \|x\|^2} + 2 \langle f(x), f(y) \rangle + \underbrace{\|f(y)\|^2}_{\lambda^2 \|y\|^2} = \lambda^2 (\|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2)$$

$$\Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$

↳ Supposons que $\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(x) \rangle &= \lambda^2 \langle x, x \rangle \\ \|f(x)\|^2 &= \lambda^2 \|x\|^2 \\ \Rightarrow \|f(x)\| &= \lambda \|x\|\end{aligned}$$

3) (a) $\Rightarrow$ supposons que $\exists \lambda > 0$ et $\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|$

Si $x \neq 0$ $\|x\| > 0$ et $\lambda > 0$ donc $\lambda \|x\| > 0$ alors $\|f(x)\| \neq 0$, donc f non nul.

Soit x, y sq $\langle x, y \rangle = 0$ donc d'après 2

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle = 0 \text{ donc } f(x) \perp f(y)$$

(b) Supposons que f est non nul et $\forall x, y$ sq $x \perp y$ $f(x) \perp f(y)$

Soit $e_1, \dots, e_n$ une BON de E .

$$e_i \perp e_j \text{ alors } e_i + e_j \perp e_i - e_j$$

$$\text{donc } f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j)$$

$$\text{donc } f(e_i) + f(e_j) \perp f(e_i) - f(e_j)$$

$$\text{donc } \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$$

(c) Donc on peut écrire

$$\|f(e_i)\| = \frac{\|f(e_i)\|}{\|e_i\|} \|e_i\| \quad \forall i$$

$$\text{Donc si } x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$f(x) = a_1 f(e_1) + \dots + a_n f(e_n)$$

$$\|f(x)\| = \sqrt{\|a_1 f(e_1)\|^2 + \dots + \|a_n f(e_n)\|^2}$$

$$= \sqrt{|a_1|^2 \|f(e_1)\|^2 + \dots + |a_n|^2 \|f(e_n)\|^2}$$

$$\frac{1}{\|f(x)\|} \|f(x)\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

$$\Rightarrow \|f(x)\| = \underbrace{\frac{\|f(e_1)\|}{\|e_1\|}}_{=\lambda} \|x\|$$

donc f est une similitude

4) Soit $x \in \text{Ker } f$

$$\text{donc } f(x) = 0$$

$$\text{alors } \|f(x)\| = \lambda \|x\| \\ = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Donc } \text{Ker } f = \{0\}$$

Alors f est bijective.

5)

$$\|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

$$\text{Soit } y = f(x)$$

$$\|y\| = \lambda \|f^{-1}(y)\|$$

$$\Rightarrow \|f^{-1}(y)\| = \frac{1}{\lambda} \|y\|$$

6) Prenons l'élément neutre l'application $x \mapsto x$

$$\|ix\| = \|x\|$$

$$\text{donc } x \mapsto x \in \text{Sim}(E)$$

$$\text{Soit } g, f \in \text{Sim}(E)$$

$$\|g(f(x))\| = \mu \|f(x)\| = \underbrace{\mu \lambda}_{=: \gamma} \|x\| = \gamma \|x\| \quad \forall x$$

donc $\text{Sim}(E)$ est stable.

toute f admet une inverse

Donc $\text{Sim}(E)$ est un groupe.