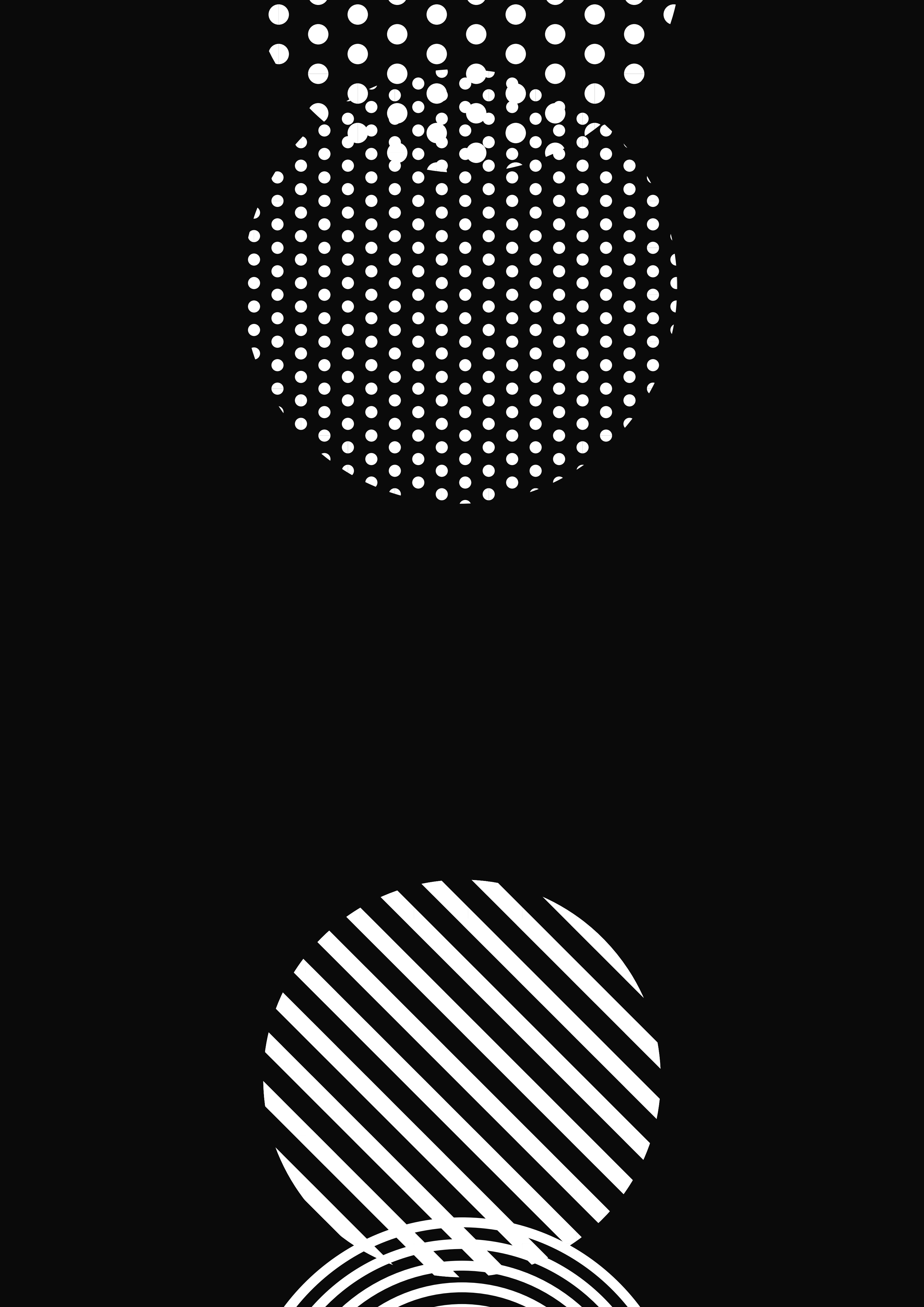

Espaces euclidiens

24

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Supposons $\det(A) = 1$

$$\operatorname{cof}(a_{i,j}) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

$$\det(A) = a_{i,1} \operatorname{cof}(a_{i,1}) + \dots + a_{i,n} \operatorname{Cof}(a_{i,n}) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T = C^T$$

mais $A^{-1} = A^T$, $A^{-1} = C^T$

$\Rightarrow C^T = A^T \Rightarrow \underline{C = A}$

si $\det(A) = -1$, donc $A^{-1} = -C^T$, $A^{-1} = A^T$

$\Rightarrow A^T = -C^T$

$\Rightarrow A = -C$

26 Soit f une transformation orthogonale

Soit A matrice de f dans BON.

Donc $A^T A = Id$

$$A(Id - A^T) = A - Id$$

$\operatorname{Ker}(f - Id)$ = "espace des valeurs propres de f"
$= \{\vec{0}\}$ si $\det A = -1$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ donc $f(x) = x$

Soit $y \in \mathrm{Im}(f - Id)$ donc $\exists x' \in E$ tq $y = f(x') - x'$

$$\langle x, f(x') - x' \rangle = \underbrace{\langle x, f(x') \rangle} - \langle x, x' \rangle$$

$$= \langle f^*(x), x' \rangle - \langle x, x' \rangle$$

$$f^*(x) = f^*(f(x)) = f^* \circ f(x) = Id(x) = x$$

donc $\langle x, y \rangle = \langle x, x' \rangle - \langle x, x' \rangle = 0$

Donc $\forall x \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ $x \perp y$ $\perp y \in \mathrm{Im}(f - Id)$

Donc $x \in \mathrm{Im}(f - Id)^\perp$

Donc $\mathrm{Ker}(f - Id) \subset \mathrm{Im}(f - Id)^\perp$

Soit $\underset{\neq \vec{0}}{x} \in \mathrm{Im}(f - Id)^\perp$ donc $\forall \underset{\neq \vec{0}}{y} \in \mathrm{Im}(f - Id)$ $x \perp y$
i.e $\langle x, y \rangle = 0$

Comme $y \in \mathrm{Im}(f - Id)$ donc $\exists x' \in E$
tq $y = f(x') - x'$

$\Rightarrow \langle x, f(x') - x' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, f(x') \rangle - \langle x, x' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, f(x') \rangle = \langle x, x' \rangle$

$\Rightarrow \langle f(x), f(x') \rangle = \langle x, f^*(x') \rangle$

$= \langle x, x' \rangle$ car orthogonal

$\Rightarrow \langle f(x), f(x') \rangle = \langle x, x' \rangle = \langle x, f(x') \rangle$

$\Rightarrow \langle f(x) - x, f(x') \rangle = 0$

$\Rightarrow f(x) - x = 0 \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f - Id)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(f - Id)^\perp \subset \mathrm{Ker}(f - Id)$

Donc $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Im}(f - Id)^\perp$

Supposons que $(f - Id)^2 = 0$

i.e $\forall x \in E \quad (f - Id)^2(x) = 0$

$= (f - Id)(f - Id)(x) = 0$

notons $y := (f - Id)(x)$

donc $(f - Id)(y) = 0 \Rightarrow y \in Ker(f - Id)$

$\in Im(f - Id)^{\perp}$

Donc mais $y \in Im(f - Id)$

donc $\langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = \vec{0}$

donc $x \in Ker(f - Id)$

i.e $(f - Id)(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x \quad \forall x \in E$

Donc $f = Id$