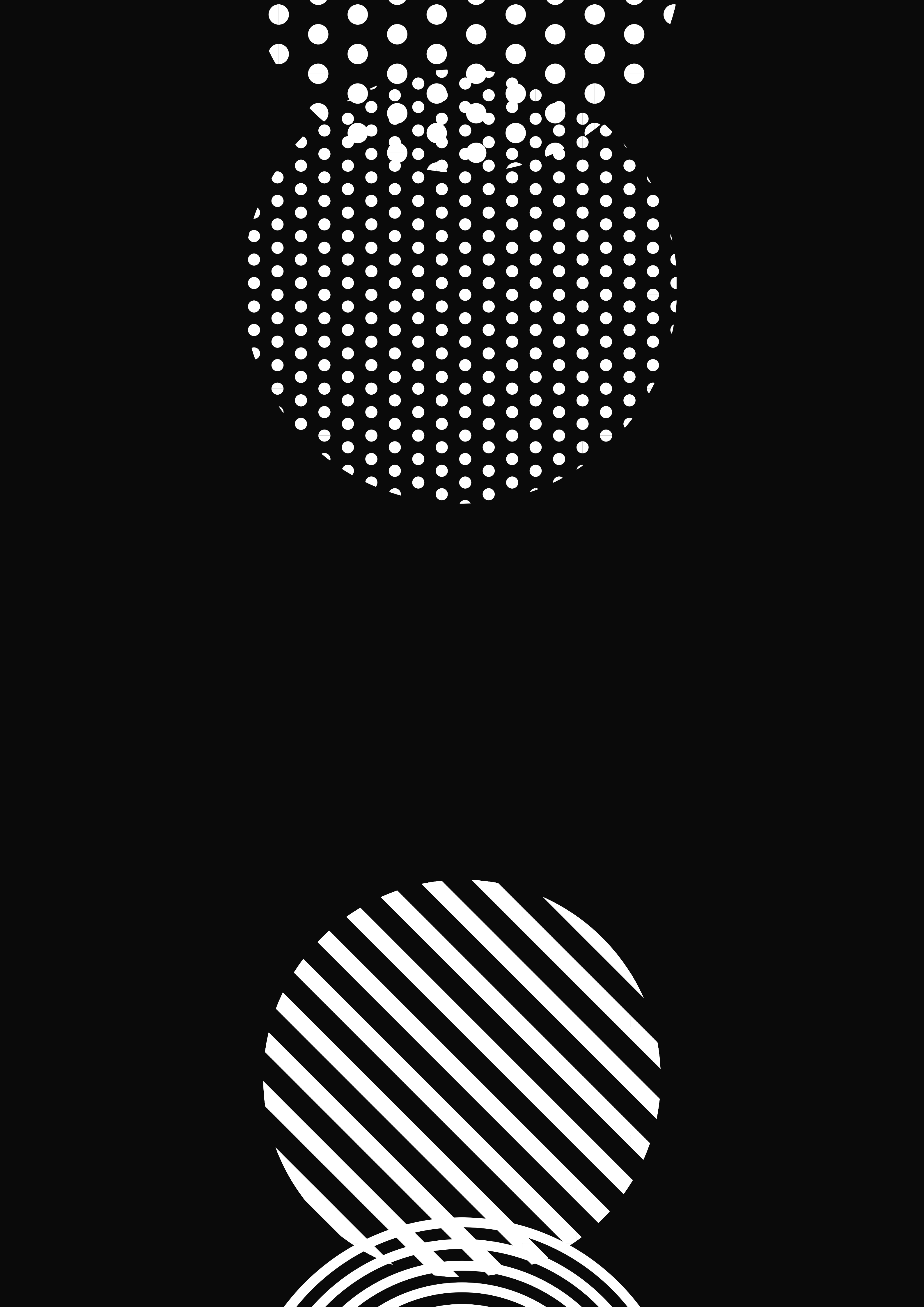

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(\lambda^2+1) = P_f(\lambda)$$

La matrice n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'est pas scindé.

$$P_f(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2+1) = (2-\lambda)(\lambda - i)(\lambda + i) \quad \text{dans } \mathbb{C}$$

Or ce polynôme est scindé et admet seulement les racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 1 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \mathcal{M}at_{e_i}(f)$

Donc $f(e_1) = e_1 + \dots + e_n$

$\vdots$

$f(e_n) = e_1 + \dots + e_n$

d'où $f(e_1 + \dots + e_n) = f(e_1) + \dots + f(e_n)$

$= n f(e_1) = n(e_1 + \dots + e_n)$

Donc $v_1 = e_1 + \dots + e_n$ est un vecteur propre de f avec une valeur propre n. $E_n \geq 1$

$$\mathrm{Ker}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & - & - & \cdots & 0 \\ \vdots & - & & & \vdots \\ 0 & & - & - & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \dim \mathrm{Ker}(A) = n-1$$

D'où $E_n + E_0 = \dim E = n$ donc A est diagonalisable avec les valeurs propres n de multiplicité 1 et 0 de multiplicité $n-1$

D'où $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = PBP^{-1}$

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable avec les valeurs propres 0 et 1.

Donc $\exists P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $A = PBP^{-1}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = PB^2P^{-1}$ car B diagonale

$$= P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = A$$

Donc $A^2 = A$.

Exercice 4

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

$$E_1 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\dim E_1 = 1$ car $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$$E_2 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim E_2 = 1$

donc $\dim E_1 + \dim E_2 \neq 3 = \dim E$
donc A n'est pas diagonalisable.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

$$E_1(B) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$ donc $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

d'où $\dim E_1 = 2$

$E_2(B) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

donc $\dim E_2 = 1$

d'où $\dim E_2 + \dim E_1 = 3 = \dim E$

donc B est diagonalisable.

Exercice 7

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

A est diagonalisable ssi $(1-A)(2-A) = 0$ (radical d'un polynôme annulateur doit annuler la matrice)

i.e $A^2 - 3A + 2 = 0$

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 3b+ac \\ 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 - 3A + 2\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 3b+ac \\ 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3a & 3b \\ 0 & 3 & 3c \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -a & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = 0 \\ ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix}$

donc pour que A soit diagonalisable il faut que $a = 0$.

Exercice 5

$A^3 + 2A = 12 I_n \Rightarrow A^3 + 2A - 12 I_n = 0$

Or A diagonalisable donc elle admet les valeurs propre

soit $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, $\exists u \in E$ (≠0) ty $Au = \lambda u$

Donc $(\lambda^3 + 2\lambda - 12)u = 0$ or $u \neq 0$ donc $\lambda^3 + 2\lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 2$

Donc 2 est la seul valeur propre de A.

Or A est diagonalisable donc $E_2 = \mathbb{R}^n$

i.e $\dim \operatorname{Ker}(A - 2I_n) = n = \dim E$

donc $\forall u \in E \ (A - 2I_n)u = 0 \Rightarrow Au = 2u$

d'où $A = 2I_n$

Donc la seule forme de A possible vérifiant $A^3 + 2A = 12I_n$ est $A = 2I_n$

Exercice 6

1) Faux prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$ scindé avec 1 seule valeur propre

mais $\dim \operatorname{Ker}(A - I) = \dim \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq \dim E = 2$

donc A n'est pas diagonalisable.

2) Faux $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$ pas à racines simples

mais A diagonale.

3) Faux. Soit $Q(X) = (1-X)^2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Q(A) = (Id - A)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc Q scindé et annule A mais A n'est pas diagonalisable.

4) Vrai Soit M diagonalisable et $P_M(X) = (1-X)^n$
donc 1 est valeur propre de M et
$\Rightarrow$

$\operatorname{Ker}(I_n - M)^n = E$ i.e $\forall u \in E \quad u - Mu = 0$
$\Rightarrow u = Mu$

d'où $M = I_n$.

E Soit $M = I_n$ et $P_M(X) = (1-X)^n$

M est diagonale donc diagonalisable.

5] Faux $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P_M(X) = (X-1)^2(X-2)(X-3)$

mais M est diagonale donc diagonalisable.

6] $\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$(2-\lambda)(-1-\lambda)((2-\lambda)(-1-\lambda)+1) - 3(-2)((2-\lambda)(-1-\lambda)+1)$

$((2-\lambda)(-1-\lambda)+1)((2-\lambda)(-1-\lambda)+6)$

$= (\lambda^2 - \lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 4)$

$\Delta = 1 - 8 < 0$ donc $\lambda^2 - \lambda + 4$ n'a pas de racines réels et donc

A n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$

7] $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

Donc $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15 = i^2 15$

donc $\lambda_3 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$

$\lambda_4 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$

Donc A admet 4 valeurs propres distinctes et $\dim E = 4$ d'où

A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$