



Exercice 1

Soit x_n dans E qui converge vers x_0 pour $\|\cdot\|$

$$f(x) = u + x$$

$$f(x_n) = u + x_n \quad u + x_n \longrightarrow u + x$$

$$\text{donc } f(x_n) \longrightarrow f(x) = u + x$$

donc f continue.

Sol de prof

$$\text{Soit } f: E \rightarrow E \quad g: E \rightarrow E \quad x_0 \in E, \quad \varepsilon > 0$$
$$x \mapsto u + x \quad x \mapsto \lambda x$$

O. considère la distance induite par la norme $d: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \|x - y\|$

$$\begin{aligned} d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon &\Leftrightarrow \|f(x_0) - f(x)\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \|x_0 + u - x - u\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \|x_0 - x\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow d(x_0, x) < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } d(x_0, x) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$$

$$\text{Donc par définition } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

Donc f est continue en x_0 donc sur E

$$\text{Soient } x, y \in E, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

$$g(x + \mu y) = \lambda x + \lambda \mu y = g(x) + \mu g(y) \quad \text{donc } g \text{ est linéaire.}$$

$$\|g(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq |\lambda| \|x\|$$

Donc, d'après la caractérisation des applications linéaires continues, g est linéaire.

Exercice 2

1) $f(0) = 0$ donc $f \in A$ donc $d(f, A) = 0$

2) même raisonnement

3) Soit $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x - \frac{1}{n+1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n(0) = -\frac{1}{n+1} < 0 \quad \text{donc} \quad u_n \in A$$

$$\begin{aligned} \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad \|f - u_n\|_{\infty} &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - u_n(x)| \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| x - x + \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Donc $f \in \text{Adh}(A)$ donc $d(f, A) = 0$

4)

Soit $g \in A$

$$\text{alors} \quad d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \geq |f(0) - g(0)| = |0 - 1| = 1$$

$$\text{Donc} \quad \inf_{g \in A} (d(f, g)) \geq 1 \quad \text{donc} \quad d(f, A) \geq 1$$

$$\text{Soit } h: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 1$$

$$\cdot h(0) = 1 \quad \text{donc} \quad h \in A$$

$$\cdot d(f, h) = \|f - h\|$$

$$= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - h(x)|$$

$$= \sup_{x \in [0, 1]} |x - x - 1| = 1$$

$$\text{Donc} \quad d(f, A) \leq 1$$

$$\text{Ainsi} \quad d(f, A) = 1$$

Exercice 4

Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$

$B(a, \varepsilon)$ est un fermé qui contient $B(a, \varepsilon)$
donc $\text{Adh}(B(a, \varepsilon)) \subset B(a, \varepsilon)$

Soit $x \in \overline{B(a, \varepsilon)}$

• Si $x \in B(a, \varepsilon)$ alors $x \in \text{Adh}(B(a, \varepsilon))$

• Sinon $x \in \overline{B(a, \varepsilon)} \setminus B(a, \varepsilon)$ donc $\|a - x\| = \varepsilon$
et $x \notin B(a, \varepsilon)$ donc $\|a - x\| \geq \varepsilon$

D'où $\|a - x\| = \varepsilon$

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + (1 - \frac{1}{n+1})(x - a)$

pour $n \in \mathbb{N}, \|u_n - a\| = \|(1 - \frac{1}{n+1})(x - a)\|$

$$= |1 - \frac{1}{n+1}| \|x - a\|$$

$$= |1 - \frac{1}{n+1}| \varepsilon$$

$$< \varepsilon$$

donc $u_n \in B(a, \varepsilon)$

$$1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{donc} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + x - a = x$$

donc $x \in \text{Adh}(B(a, \varepsilon))$ dans les deux cas, $x \in \text{Adh}(B(a, \varepsilon))$

Dans $\overline{B(a, \varepsilon)} \subset \text{Adh}(B(a, \varepsilon))$.

Ainsi $\text{Adh}(B(a, \varepsilon)) = \overline{B(a, \varepsilon)}$

Exercice 5

1) Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\bullet N(f) \geq 0$$

$$\bullet N(\lambda f) = |\lambda| |f(0)| + \sup_{[a, b]} |\lambda f'(x)|$$

$$= |\lambda| (|f(0)| + \sup_{[a, b]} |f'(x)|)$$

$$\bullet N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

$$\bullet N(f) = 0 \iff |f(0)| = 0 \text{ et } \sup_{[a, b]} |f'(x)| = 0$$

Donc f constante et $f(0) = 0$ donc $\forall x, f(x) = 0$

2) Soit $f \in E$, soit $x \in [0, 1]$

f est C^1 donc le théorème des accroissements finis nous fournit

$$\exists c \in [0, 1] \quad f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$$

$$\text{Donc} \quad |f(x)| = |f(0) + x f'(c)| \leq |f(0)| + |x| \cdot |f'(c)|$$

$$\text{Donc} \quad |f(x)| \leq |f(0)| + 1 \cdot \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

$$\leq N(f)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in [0, 1]$, on obtient

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \leq N(f)$$

$$\text{Donc} \quad \|f\|_{\infty} \leq N(f)$$

3) • $N'(f) \geq 0$

$$\bullet N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(x)| dx \leq |\lambda| N'(f)$$

$$\bullet N'(f+g) \leq N'(f) + N'(g)$$

$$\bullet \text{Si } N'(f) = 0$$

$$\text{alors } |f(0)| = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(x)| dx = 0$$

et $\forall x \in [0, 1], f'(x) = 0$ car $f \in C^1$ donc continue
alors $f = 0_E$

Soit $x \in [0, 1]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt$$

$$\text{Donc} \quad |f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t) dt|$$

$$\leq |f(0)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right|$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)| dt + \int_x^1 |f'(t)| dt$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$$

$$\text{Donc} \quad \|f\|_{\infty} \leq N'(f)$$

Exercice 7

1) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\bullet \|P\|_1 \geq 1$$

$$\bullet \|\lambda P\|_1 = \int_0^2 |\lambda P(x)| dx \leq |\lambda| \int_0^2 |P(x)| dx = |\lambda| \|P\|_1$$

$$\bullet \|P+Q\|_1 = \int_0^2 |P(x) + Q(x)| dx \leq \|P\|_1 + \|Q\|_1$$

• Si $\|P\|_1 = 0$ alors $\int_0^2 |P(x)| dx = 0$ donc $\forall x \in [0, 2], P(x) = 0$
(car $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[0, 2]$)

donc P admet une infinité de racines d'où $P = 0 \in \mathbb{R}[X]$

2) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\begin{aligned} \int_0^2 |a_{n,j} X^j - a_j X^j| &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_0^2 |X^j (a_{n,j} - a_j)| &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \text{donc } |a_{n,j} - a_j| &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Soit $M = \max(p, k)$. On note $a_j = 0$ pour $j \geq p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n,j} = 0$ pour $j \geq k$

Ainsi, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers P

dans l'EUN $(\mathbb{R}_M[X], \|\cdot\|_1)$

Comme $\mathbb{R}_M[X]$ est de dimension finie et que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également P pour la norme N définie par $Q(X) = \sum_{j=0}^M b_j X^j$

$$N(Q) = \sup_{0 \leq j \leq M} |b_j|$$

$$\text{Ainsi } N(P_n - P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad \sup_{0 \leq j \leq M} |a_{n,j} - a_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \forall j \in [0, M], |a_{n,j} - a_j| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \forall j \in [0, M], a_{n,j} \longrightarrow a_j$$

3) Pour $j > k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n,j} = 0$

$$\text{Donc } a_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Donc toutes les coefficients de P de degré $> k$ sont nuls.

$$\text{Donc } P \in \mathbb{R}_k[X]$$

4) On a montré que pour toute suite convergente d'éléments de $\mathbb{R}_k[X]$, sa limite est également dans $\mathbb{R}_k[X]$

Donc d'après la caractérisation séquentielle des fermés

$\mathbb{R}_k[X]$ est fermé

$\mathbb{R}_k[X]$ est-il ouvert?

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{1}{n+1} x^{k+1}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n \notin \mathbb{R}_k[X]$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $\|P_n - 0\|_1 = \int_0^1 \left| \frac{1}{n+1} x^{k+1} \right| dx$

Donc $\forall \varepsilon > 0$ $B(0, \varepsilon) \not\subset \mathbb{R}_k[X]$ car $P_n \in B(0, \varepsilon)$

avec $0 \in \mathbb{R}_k[X]$ polynôme nul.