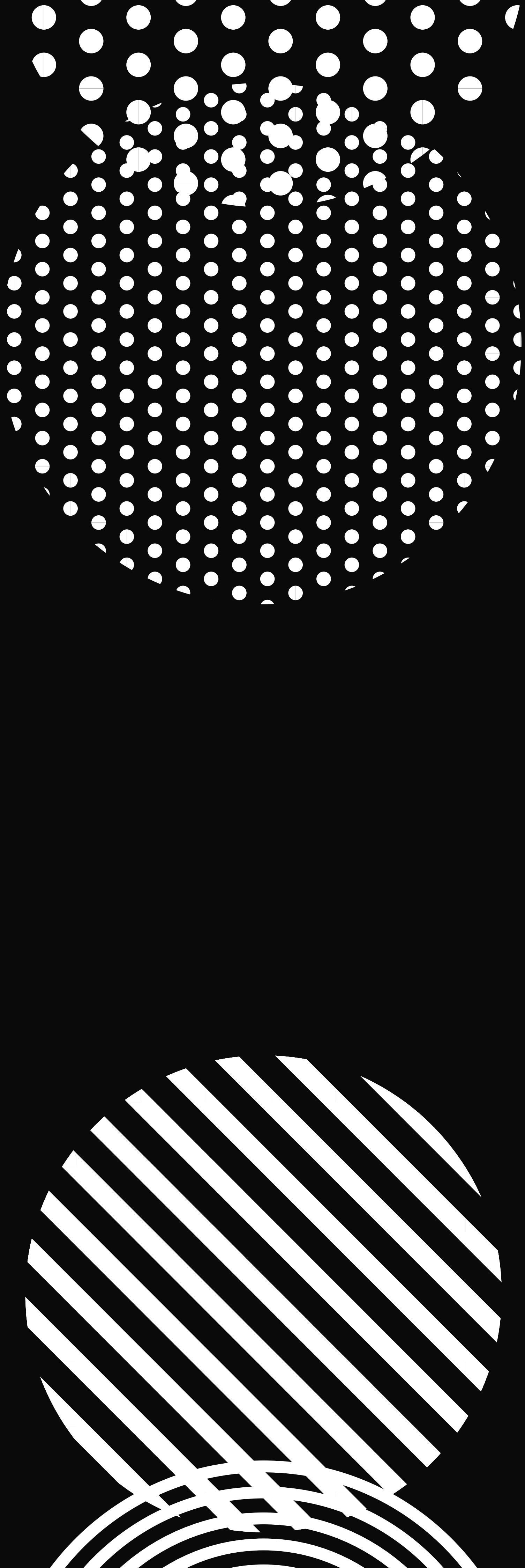

Exercice 1

1] $f_1(x,y) = \dfrac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{3r^2\cos^2\theta + r^2\cos\sin\theta}{r} = r(3\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)$

donc $f_1(r\cos\theta, r\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

donc f admet une limite en $(0,0)$ (c'est 0)

$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ tq $\left(d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon\right)$

$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \iff \forall \varepsilon>0, \exists\delta>0$ tq $\left(\overbrace{|r-0|}^{r} < \delta \Rightarrow |f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| < \varepsilon\right)$

2]

$$\begin{aligned}
|f_2(x,y)| &\leq \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \\
&\leq |(x+y)| \\
&\leq |x| + |y| \\
&\leq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \\
&\leq 2\, d((x,y),(0,0))
\end{aligned}$$

Donc $f_2(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} (0,0)$

3] $f_3(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

$f_3(x,x) = \dfrac{|2x|}{2x^2} = \dfrac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Donc f_3 n'a pas de limite.

4] $f_4(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$f_4(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r(\cos\theta + \sin\theta)$

$\leq 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

5) $f_5(x,y) = \dfrac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

En coordonnées polaires:

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left| \frac{\sin(r^2\cos^2\theta) + \sin(r^2\sin^2\theta)}{r} \right|$$

$$\leq \frac{1}{r}\left(|\sin(r^2\cos^2\theta)| + |\sin(r^2\sin^2\theta)| \right)$$

$$\leq \frac{1}{r}\left(|r^2\cos^2\theta| + |r^2\sin^2\theta| \right)$$

$$\leq \frac{1}{r} \cdot 2|r^2|$$

$$\leq 2r$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

6) $|f_6(x,y)| = \dfrac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \dfrac{1}{2}(|x|+|y|) \leq d((x,y),(0,0)) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

Donc $f_6(x,y) \longrightarrow 0$

7) $f_7(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$

$$f_7(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}$$

$$= r\cos^2\theta\sin\theta$$

$f_7(r\cos\theta, r\sin\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

donc $f_7(x,y) \longrightarrow 0$

8) $f_8(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta\cos\varphi$
$z = r\sin\theta\sin\varphi$

$f_8(r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi) = r\cos\theta\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$

donc $f_8(\ldots) \leq r$ donc f_8 cv. vers 0

Exercice 2

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = -\frac{y^2}{y^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} f(x,y) \right) = -1$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \quad \text{n'existe pas}$$

Exercice 3

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$$

On définit $\mathcal{U} = \{0\} \times \mathbb{R}^*$
$V = \mathbb{R}^* \times \{0\}$
$W = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

Ainsi $\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \cup V \cup \{0,0\} \cup W$
et cette union est disjointe

- Par produit, somme, et composition de fonction continues sur W
f est C^0 sur W

- On va montrer que f n'est pas continue en aucun point de $\mathcal{U}$
Soit $X \in \mathcal{U}$, on peut donc écrire $X = (0,y)$ avec $y \neq 0$
pour mq f n'est pas C^0 au point X, on peut utiliser
la caractérisation séquentielle des applications continues
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}$
$$u_n = \left(\frac{1}{\pi y (2n+\frac{1}{2})}, y \right) \quad \text{(Bien définie car } y \neq 0\text{)}$$

Cette suite cv. vers X $\left(u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0,y) = X\right)$
pour $n \in \mathbb{N}$
$$f(u_n) = \left(\left(\frac{1}{\pi y (2n+\frac{1}{2})} \right)^2 + y^2 \right) \underbrace{\sin\left(\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right)}_{= \sin(\frac{\pi}{2}) = 1}$$

$$= \frac{1}{\pi^2 y^2 (2n+\frac{1}{2})^2} + y^2$$

Donc $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} y^2 \neq 0$
$\neq f(X)$

donc f n'est pas C^0 en X

Ainsi f n'est continue en aucun point de $\mathcal{U}$
par symmetrie de l'énoncé f n'est continue en aucun point de V.

Soit $\varepsilon > 0$, on note $\alpha = \sqrt{\varepsilon}$. Ainsi : $d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \leq \alpha \Rightarrow |f(x,y) - 0| \leq \varepsilon$
Donc f est continue en $(0,0)$

Exercice 4

$$f_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial x}{\partial f_1}(x,y) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial f_1}(x,y) = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

Exercice 5

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cos t \frac{d}{dt}\cos t + \frac{\partial f}{\partial y}\sin t \frac{d}{dt}\sin t$$

$$g(t_0+t) = g(t_0) + g'(t_0)\cdot t + o(t)$$

$$f(X_0+X) = f(X_0) + \mathcal{D}_f(X_0)\cdot X + o(X)$$

$$= f(X_0) + \vec{\nabla} f(X_0)\cdot X + o(X)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|\right)$$

$$g(t_0+t) = f\begin{pmatrix} \cos(t_0+t) \\ \sin(t_0+t) \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} \cos t_0 - (\sin t_0)t + o(t) \\ \sin t_0 + (\cos t_0)t + o(t) \end{pmatrix}$$

$$= f\left(\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\sin t_0)t + o(t) \\ (\cos t_0)t + o(t) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{f\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}}_{g(t_0)} + \vec{\nabla} f\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -(\sin t_0)\cdot t + o(t) \\ (\cos t_0)\cdot t + o(t) \end{pmatrix} + o(t)$$

$$= g(t_0) + \vec{\nabla} f\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} t + o(t)$$

$$= g(t_0) + \underbrace{\vec{\nabla} f\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}}_{g'(t_0)} t + o(t)$$

Donc g est dérivable en t_0

et $$g'(t_0) = \vec{\nabla} f\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$$

$$= -\sin t_0 \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} + \cos t_0 \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$

Def 5.1

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dt} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x+t,y)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx,y) - f(x,y)}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est bien définie en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ par symétrie de l'énoncé.

Exercice 8

$f_1(x,y) = x^3 + y^3$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 3y^2$ donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{\nabla} f_1(x,y) = 0 \iff (x,y) = 0$

Donc on a
$$\mathcal{H}_{f_1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc sa valeur propre est 0.

Donc $(0,0)$ est un point critique dégénéré.

$f_2(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$

$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x-2$

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = y^2-4$ donc $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y-4 \end{pmatrix}$

$\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,2)$

$\mathcal{H}_{f_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

La seule valeur propre et 2, donc (1,2) est un minimum local.

$f_3(x,y) = x^3+y^3-6(x^2-y^2)$

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 3x^2-12x$ $\vec{\nabla} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0 \Rightarrow (x,y)=(4,-4)$ et $(x,y)=(0,0)$ et $(0,-4)$ et $(4,0)$

$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = 3y^2+12y$

$\mathcal{H}_{f_3}^{(x,y)} = \begin{pmatrix} 6x-12 & 0 \\ 0 & 6y+12 \end{pmatrix} =$

$\mathcal{H}_{f_3} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}^{(0,-4)}$ max local

$\mathcal{H}_{f_3} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}^{(4,0)}$ min locale.

$\mathcal{H}_{f_3}(4,-4)\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

(4, −4) et point selle

$\mathcal{H}_{f_3}^{(0,0)} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ (0,0) point selle

$f_4(x,y) = x^2+3y^2-2x-10y+2xy+6$

$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 2x-2+2y$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f_4}{\partial y} = 6y-10+2x$ $x=-1$, $y=2$

$\mathcal{H}_{f_4}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda)-4 = \lambda^2-8\lambda+8$

$f_5(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

$\frac{\partial f_5}{\partial x}(x,y) = y - \frac{50}{x^2}$ $\quad -50 \cdot x^{-2} \quad 100 \cdot x^{-3}$

$\frac{\partial f_5}{\partial y}(x,y) = x - \frac{20}{y^2}$

$\vec{\nabla} f_5(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{50}{x^2} \\ x = \frac{20}{y^2} \end{cases}$

$y = \frac{50}{\frac{400}{y^4}} = \frac{y^4}{8}$

$8 = y^3 \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow x = \frac{20}{4} = 5$

$(5,2)$ point critique

$H_{f_5}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{pmatrix}$

$H_{f_5}(5,2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$

$(4-\lambda)(25-\lambda) - 25$

$\lambda^2 - 29\lambda + 75$

$\Delta = 841 - 300 = 541$ $\quad 23.26$

$\lambda_1 = \frac{29 + 23.26}{2} > 0$

donc min locale.

$\lambda_2 = \frac{29 - 23.26}{2} > 0$