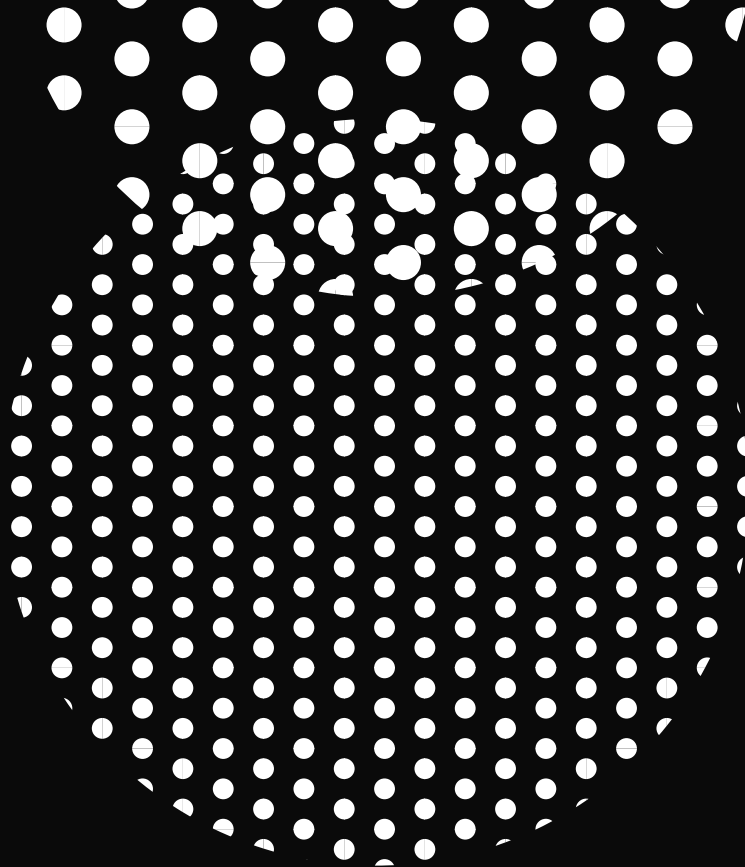




Exercice 1

$$1) \quad \text{Adh}(A) = A \quad (\text{conjecture})$$

Pour montrer que $\text{Adh}(A) = A$ il suffit de montrer que A est fermé.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge.
On note x^* sa limite.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $u_n = (x_n, f(x_n))$
avec $x_n \in \mathbb{R}$ et $f: x \mapsto x^2$ car. donc x_n aussi.

On note $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$
 f continue donc
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x^*) = x^{*2}$

$$\text{Donc } X^* = (x^*, (x^*)^2)$$

$$\text{Donc } X^* \in A$$

$$\text{Donc } A \text{ fermé} \quad \text{Donc } \text{Adh}(A) = A$$

$$2) \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^2 \geq 1\}$$

Conjecture:
 $\text{Adh}(B) = B$

Justification:

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^3 + y^2$$

f est continue car application polynomiale des coordonnées.

$$\text{et } B = f^{-1}(\underbrace{[1, +\infty[}_{\text{fermé}}) \quad \text{donc par continuité de } f \quad B \text{ est fermé.}$$

$$\text{Donc } \text{Adh}(B) = B$$

Conjecture: $\text{Int}(B) = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + y^2 > 1\}}_{:= \mathcal{D}}$

$\mathcal{D}$ ouvert car image réciproque de l'ouvert $]1, +\infty[$ par f continue.

$\mathcal{D}$ ouvert et $x \in B$ donc $\mathcal{D} \subset \text{Int}(B)$

3]

$$C = \mathbb{Z}^2$$

Conjecture:

$$\text{Adh}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$$

$$\text{Int}(\mathbb{Z}^2) = \emptyset$$

Justification $\text{Adh}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ qui converge. On peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (a_n, b_n) \quad \text{avec } a_n, b_n \in \mathbb{Z}$$

(u_n) cv. donc (a_n) et (b_n) convergent,

(a_n) cv. donc elle est de Cauchy, ce qui nous fournit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \frac{1}{2}$

Soient $n \geq N$ et $m \geq N$, ainsi $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$

Comme $a_n, a_m \in \mathbb{Z}$, nécessairement $a_n = a_m$

Donc (a_n) est constante à partir du rang N .

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n) = a_N \in \mathbb{Z}$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \in \mathbb{Z}^2$$

Donc $\mathbb{Z}^2$ est fermé donc $\text{Adh}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$

Justification $\text{Int}(\mathbb{Z}^2) = \emptyset$

Soit $X = (x, y)$

Soit $\varepsilon > 0$

On définit $x' = \begin{cases} x + \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } \varepsilon \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } \varepsilon \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Dans tous les cas $x' \notin \mathbb{Z}$ donc $(x', y) \notin \mathbb{Z}^2$
mais $(x', y) \in B(x, \varepsilon)$

Donc $B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \neq \emptyset$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2) \neq \emptyset$

donc $x \in \text{Adh}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2)$ donc $x \notin \text{Int}(\mathbb{Z}^2)$

Or $\text{Int}(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2$ donc $\text{Int}(\mathbb{Z}^2) = \emptyset$

4]

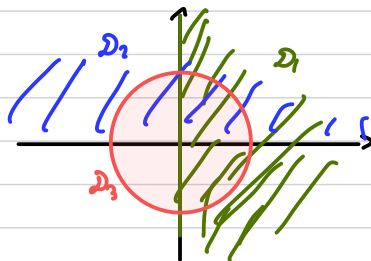
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$$

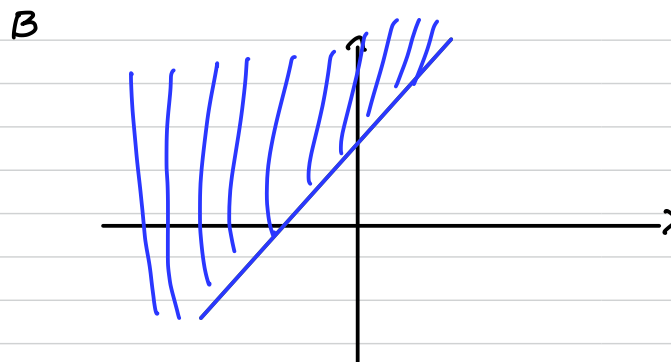
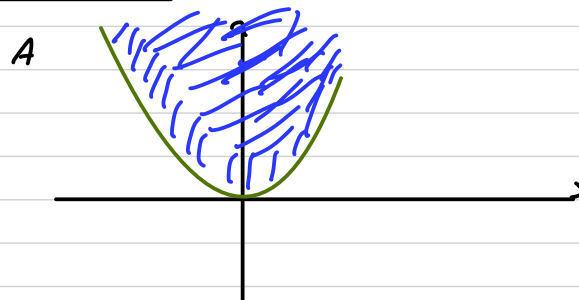
avec $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



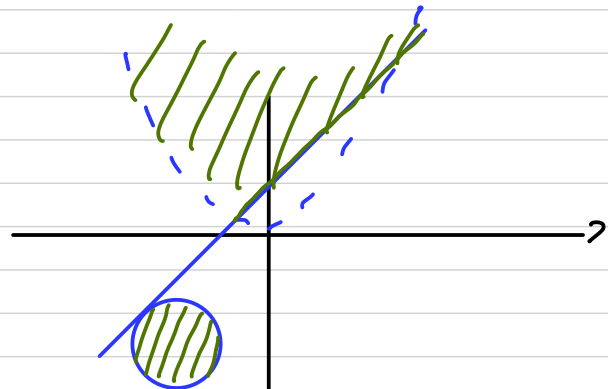
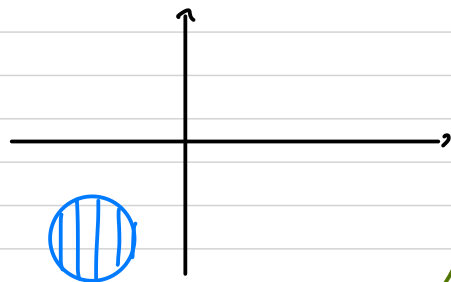
Exercise 5



$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+2)^2 \leq 1$$

C



Soient $X \in \mathbb{R}^2$ et $z > 0$. On veut montrer $\exists y \in \mathcal{D}$ tel que $y \notin \mathcal{B}(X, z)$

Soit $Y = (0, 6+2z)$

$$d(X, Y) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-(6+2z))^2} = \sqrt{a^2 + 4z^2} \geq 2z > z$$

Donc $Y \notin \mathcal{B}(X, z)$, ainsi $\mathcal{D}$ n'est pas borné

2) On définit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$$

$$D' = (A \cap B) \cup C$$

On veut montrer $D' = \text{Adh}(\mathcal{D})$

On commence par montrer $\text{Adh}(\mathcal{D}) \subset D'$

A, B, C sont fermés car images réciproques

des fermés $[0, +\infty[$, $[1, +\infty[$, $[0, 1]$ par les applications

continues $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto y - x^2$$

$$(x, y) \mapsto y - x$$

$$(x, y) \mapsto (x+1)^2 + (y+2)^2$$

car polynomiales.

Donc par intersection et réunion (finies) de fermé, D' est fermé.

Où $A \subset A'$ donc $A \cap B \subset A' \cap B$

donc $(A \cap B) \cup C \subset (A' \cap B) \cup C$

donc $\mathcal{D} \subset D'$

donc $\text{Adh}(\mathcal{D}) \subset D'$

On montre ensuite $\mathcal{D}' \subset \text{Adh}(\mathcal{D})$

Soit $x \in \mathcal{D}'$

$$\begin{aligned} \cdot \text{ si } x \in \mathcal{D}, \text{ alors } x \in \text{Adh}(\mathcal{D}) \\ \cdot \text{ si } x \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D} &= ((A' \cap B) \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup C) \\ &= ((A' \cap B) \cup C) \cap ((A \cap B) \cup C)^c \\ &= ((A' \cap B) \cup C) \cap (A \cap B)^c \cap C^c \\ &= (A' \cap B) \cap (A^c \cup B^c) \cap C^c \\ &= A' \cap A^c \cap B \cap C^c \\ &= (A' \setminus A) \cap B \cap C^c \\ &= (A' \setminus A) \cap B \quad \text{car } B \subset C^c \end{aligned}$$

donc $x \in A' \setminus A$ donc $y = x^2$ et $x \in B$
donc $y \geq x + 1$

Soit (u_n) la suite définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (x, y + \frac{1}{n+1})$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, y + \frac{1}{n+1} > y = x^2$$

$$\text{donc } u_n \in A$$

$$y + \frac{1}{n+1} > y \geq x + 1 \text{ donc } u_n \in B$$

$$\text{Donc } u_n \in A \cap B$$

$$\text{Donc } u_n \in (A \cap B) \cup C = \mathcal{D}$$

Exercice 6

On suppose A ou B ouvert. Par symétrie de l'énoncé, on suppose A ouvert.

Soit $z \in A+B$. On peut écrire $z = a+b$
avec $a \in A$
 $b \in B$

Comme A est ouvert, on a $\varepsilon > 0$ tq $B(a, \varepsilon) \subset A$

Soit $z' \in B(z, \varepsilon)$

Alors $z' = z + z' - z$
 $= a + b + z' - z = a' + b$ avec $a' = a + z' - z$
cà d $a' - a = z' - z$

Comme on est dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$ on peut écrire