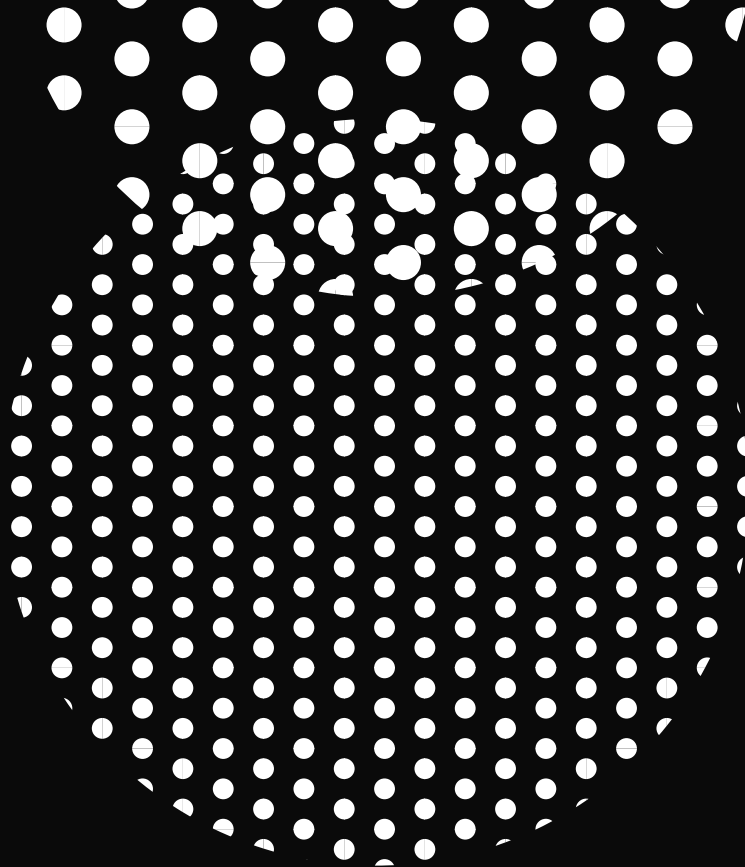




Exercice 2

$$\exists \cdot \forall x, y \in X, \quad \mathcal{J}(x, y) \leq d(x, y)$$

$$\cdot \text{ Existe-t-il } c > 0 \text{ tq } \forall x, y \in X, \quad d(x, y) \leq c \mathcal{J}(x, y)$$

Analyse: On suppose que c'est le cas

$$\text{Comme } \forall x, y \in X, \quad \mathcal{J}(x, y) \leq 1$$

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) \leq c$$

Donc (X, d) est bornée.

Synthèse: On suppose (X, d) bornée

$$\text{On a donc } R > 0 \text{ tq } \forall x, y \in X, \quad d(x, y) \leq R$$

$$\text{On pose } c = \max(1, R)$$

Soient $x, y \in X$

$$\cdot \text{ Si } d(x, y) \leq 1 \text{ alors } d(x, y) = \mathcal{J}(x, y) \leq c \mathcal{J}(x, y)$$

$$\cdot \text{ Sinon } \mathcal{J}(x, y) = 1 \\ \text{donc } d(x, y) \leq c \mathcal{J}(x, y)$$

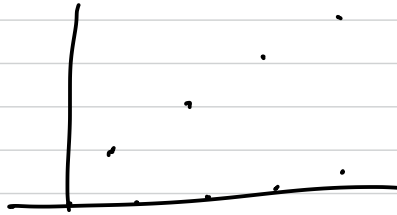
$$\text{Dans les deux cas, } d(x, y) \leq c \mathcal{J}(x, y)$$

exercice 3

1] faux

contre - exemple:

$$u_n = \begin{cases} 1/0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/1 & \text{sinon} \end{cases}$$



Il n'y a pas de limite.

2] faux

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/n & \text{sinon} \end{cases}$$

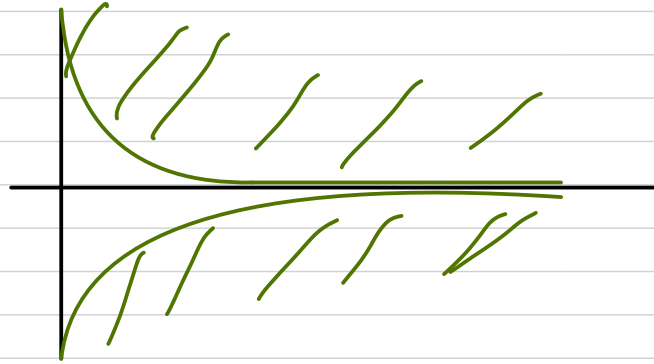
Il n'a pas de limite

3]

Exercice 4

$\forall A, B \subset X, (d(A, B) = 0 \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \exists A \cap B \neq \emptyset$

Contre exemple.



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq -1 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$\cdot \text{ Si } (x, y) \in A \cap B \quad \text{alors} \\ xy \leq -1 \quad \text{et} \quad 1 \leq xy$$

$$\text{Donc} \quad 1 \leq -1 \quad \rightarrow \text{absurde}$$

$$\text{Donc} \quad A \cap B = \emptyset$$

Soient (u_n) et (v_n) les suites de $\mathbb{R}^2$ définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$v_n = \left(n+1, -\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{matrix} u_n \in A \\ v_n \in B \end{matrix} \quad d(u_n, v_n) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \quad \longrightarrow 0$$

$$\text{Or } \forall n, 0 \leq d(A, B) \leq d(u_n, v_n)$$

$$\text{Donc } d(A, B)$$

Exercice 5

≡ On suppose F fini

Soit $\{\mathcal{I}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F
(càd vérifiant $F \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{I}_i$)

Pour chaque $x \in F$ on prend $i_x \in I$

Ainsi $\{\mathcal{I}_{i_x}\}_{x \in F}$ est fini et c'est bien
un recouvrement ouvert de F
car $\forall x \in F, x \in \mathcal{I}_{i_x} \subset \bigcup_{x \in F} \mathcal{I}_{i_x}$

donc $F \subset \bigcup_{x \in F} \mathcal{I}_{i_x}$

Donc F compact d'après la définition.

$\Rightarrow$ On suppose F non-fini

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments distincts de F

Ainsi $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow d(u_i, u_j) = 1$

Soit φ une extractrice, alors la même, $\forall i, j \in \mathbb{N},$
 $i \neq j \Rightarrow d(u_i, u_j) = 1$

Donc $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, donc elle ne
converge pas. Donc d'après la caractérisation
séquentielle, F n'est pas compact.

Exercice 6

1) On suppose (E, d) compact

Soit $F \subset E$, un fermé. Pour montrer que $f(F)$ est fermé on peut utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(F)$ qui converge vers une limite l . A-t-on $l \in f(F)$?

pour $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f(F)$, ce qui nous fournit $x_n \in F$
tq $y_n = f(x_n)$

Comme E est compact et F fermé $F \cap E_1 = F$ est compact. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un compact, ce qui nous fournit une extractrice φ tq $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit x^* sa limite, f est continue,

$$\text{donc } f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x^*) \quad \text{cà d} \quad y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x^*)$$

$$\text{Or } y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad \text{donc } y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

par unicité de la limite $l = f(x^*)$. Donc $l \in f(F)$
donc $f(F)$ est fermé.

2) $E_1 = \mathbb{R} = E_2$

$$F = \mathbb{R}$$

$f = \arctan$ cont. sur $\mathbb{R}$

$$f(F) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \begin{array}{l} \text{n'est pas compact} \\ \text{n'est pas fermé} \end{array}$$

Exercice 10

1) Non. $\{(x, y) : yx = 1\} =: A$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} =: B$$

A est fermé car image réciproque de $\{1\}$
et $(x, y) \mapsto xy$ continue car polynomiale.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = (\frac{1}{n}, n)$
 $b_n = (0, n)$

$$d_2(a_n, b_n) = \sqrt{(\frac{1}{n} - 0)^2 + (n - n)^2} = \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } 0 \leq d_2(A, B) \leq \frac{1}{n}$$

Par encadrement, $d_2(A, B) = 0$

Si $d_2(A, B)$ était atteinte, on aurait $a \in A$ et $b \in B$
tq $d_2(a, b) = 0$ i.e. $a = b$

Donc $a \in A \cap B$, donc en notant $a = (x', y')$, on a $xy = 1$
et $x = 0$

Donc $0 = 1$

Donc $d_2(A, B)$ non atteint.

2) Si A et B sont compacts, alors $A \times B$ est compact.

Or $d : A \times B \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue donc l'ensemble

$d(A \times B)$ atteint min et max
donc le min est atteint.

