



Exercice 1

1) Par définition d peut avoir seulement 2 valeurs : 0 et 1 donc $\forall x, y \in E$ $d(x, y) \geq 0$
Ensuite, par définition $d(x, y) = 0$ si $x = y$
donc fait.

Soit $x, y \in E$
si $x = y$ alors $d(x, y) = 0 = d(y, x)$
sinon $x \neq y$ alors $d(x, y) = 1 = d(y, x)$

Il nous reste à montrer l'ineg. triang.

Soit de plus $z \in E$

Si $x = y$ donc $d(x, y) = 0$
et alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall z \in E$
sinon $x \neq y$
 $d(x, y) = 1$
 $d(x, z) = 0$ ou 1
 $d(z, y) = 0$ ou 1

z ne peut pas être égale à la fois à x et à y . Alors l'un des terme vaut toujours 1.

Alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Donc d est bien une distance.

Soit $z \geq 0$ si $z = 0$
 $B(x, z) = \emptyset$
si $z > 0$ $B(x, z) = \{x \in E : d(x, x_0) < z\}$
si $0 < z \leq 1$ $B(x_0, z) = \{x\}$ car $d < 1$ donc $d = 0$
si $z > 1$ $B(x_0, z) = E$ car $\forall x \in E$ $d(x, x_0) = 0$ ou 1 .

$\tilde{B}(x, z) = \{x\}$ si $z = 0$
 $\tilde{B}(x_0, z) = \{x\}$ si $0 < z < 1$
et $B(x_0, z) = E$ si $z \geq 1$

2) Soit $A = \{x\}$ où $x \in E$

D'après 1 $B(x, 1) = \{x\}$ donc $B(x, 1) \subseteq A$, donc
 A est ouvert $\forall x \in E$.

3) On a déjà montré que $\{x\}$ et E sont ouverts.

Soit $A \subset E$.

$\forall x \in A$, $B(x, 1) = \{x\} \subset A$. Donc tout ensemble A
d'éléments de E est ouvert.

Exercice 3

1. faux. Contre-exemple: $u_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ pair} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$

u_n n'est pas bornée mais u_n n'a pas
de limite et $\|u_n\|$ n'a pas de limite
en $n \rightarrow +\infty$.

2. faux $u_n = (x_n, y_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ pair} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases}$

$\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ mais ni x_n ni y_n
n'ont de limite.

3. faux. Prenons $A =]0, 1]$ et $E = \mathbb{R}$, $\perp$ usuelle

A n'est pas ouvert, car $\forall \varepsilon > 0$
 $B(1, \varepsilon) \not\subset A$ car $1 + \varepsilon > 1$.

$$E \setminus A =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$$

aussi n'est pas ouvert car $B(0, \varepsilon) \not\subset E \setminus A$
donc A n'est pas fermé non plus.

4) Oui. Exemple: $\emptyset, \mathbb{R}$

$$]a, b[\quad a = \frac{a-b}{4} \quad a = \frac{a-b}{3}$$

Exercice 4

3] Soient $A, B \subset X$ tq $\partial B \subset A \subset B$

$$\partial B = \text{Adh}(B) \setminus \text{Int}(B)$$

$$\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$$

$$\text{Adh}(B) \setminus \text{Int}(B) \subset A \quad \text{donc} \quad \text{Adh}(B) \setminus \text{Int}(B) \subset \text{Adh}(A)$$

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c \quad \text{et alors} \quad \text{Adh}(B) \setminus \text{Int}(B) \subset \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$$

$$\text{donc} \quad \partial B \subset \partial A$$

Exercice 5

Soit (E, d) avec d discret.

Supposons que F est fini.

Alors soit $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ recouvrement ouvert de F
 alors $\forall x \in F, \exists i \in \mathbb{N}$ tq $x \in U_i$, comme
 F est fini, on peut prendre un nombre fini
 de tels U_i , notons α_i
 et $F \subset \bigcup_{\alpha_i} U_i$, donc F est compact.

Supposons que F non-fini, et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments
 de F tous distincts. Donc $\forall i \neq j \in \mathbb{N} \quad d(u_i, u_j) = 1$,
 alors la suite n'est pas de Cauchy. Donc pour toute
 extraction ϕ , $d(\phi(i), \phi(j)) = 1$, et $(u_{\phi(n)})$ ne converge
 jamais et alors F n'est pas compact.

Exercice 6

1) Supposons (E, d) compact.

Soit F fermé.

Notons $F' = f(F)$ et soit une suite d'éléments de F' .

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in F$ tq $f(x) = u_n$ notons $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F tq

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(v_n)$$

F est compact car $F = F \cap E$, où F fermé et E compact.

Alors, on peut extraire $v_{p(n)}$ qui converge vers $l \in F$ car F compact.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{p(n)} = l \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_{p(n)}) = f(l) \in F' \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{p(n)}$$

F' est fermé si tout u_n convergent converge vers une limite qui est aussi dans F' .

Supposons u_n converge vers u^* .

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{p(n)} = f(l)$ par l'unicité de limite, on a

$u^* = f(l) \in F'$. Par conséquent, $f(F)$ est fermé.

2) Si E n'est pas compact, alors F ne l'est non plus. Alors il existe une suite u_n dont on ne peut pas extraire une suite convergente et donc on ne peut pas conclure que $u^* \in F'$.

Contre-exemple $E_1 = \mathbb{R} = E_2$. $F = \mathbb{R}$ fermé mais pas compact.
 $\arctan(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pas fermé]

Continue

Exercice 9.

Si $f^{-1}(F)$ est fermé, alors f est continue.
↳ fermé

On a montré que $\forall E$, fermé $f(E)$ est fermé.
i.e. $(f^{-1})^{-1}(E)$ est fermé, donc (f^{-1}) est continue.

Exercice 10

Soit (X, d) espace métrique et $A, B \subset X$

1] Prenons $A = \{ (x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \}$ fermé
 $B = \{ (x, -\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R} \}$ fermé

On a soit $a_n = (n, \frac{1}{n}) \in A$
 $b_n = (n, -\frac{1}{n}) \in B$

$$d(a_n, b_n) = \sqrt{(n-n)^2 + (\frac{1}{n} + \frac{1}{n})^2} = \sqrt{\frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Mais $d(a_n, b_n) = 0$ si $a_n = b_n$
i.e si $n = n$ et $\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow 2 = 0$ impossible.

Donc elle n'est pas atteinte.

2] Supposons A fermé et B compact.

Soit $a \in A$,

notons $g: B \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $b \mapsto d(a, b)$

alors $\inf \{ g(b) : b \in B \}$ est atteint car d continue
et B compact.

Mais $g(a) = d(a, b)$ b fixé, son minimum
n'est pas forcément atteint.

3] Les deux sont atteints.

Exercice 11

Soit $L = d(A, B)$

Donc $\forall a \in A, b \in B$
 $d(a, b) \geq L$

$\forall c \in C, c \in B$ donc $d(a, c) \leq L$
Or $\forall a \in A, c \in C$ $d(a, c) \geq L$
donc $d(A, C) \geq d(A, B)$ c.q.f.d.

2) $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Soit $a_n \rightarrow a^*$ et $b_n \rightarrow b^*$

tg $d(a^*, b^*) = d(A, B)$

$a^* \in \bar{A}$
 $b^* \in \bar{B}$

Les limites de $\bar{A}, \bar{B}$ sont aussi dans
 $\bar{A}, \bar{B}$ alors $d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$