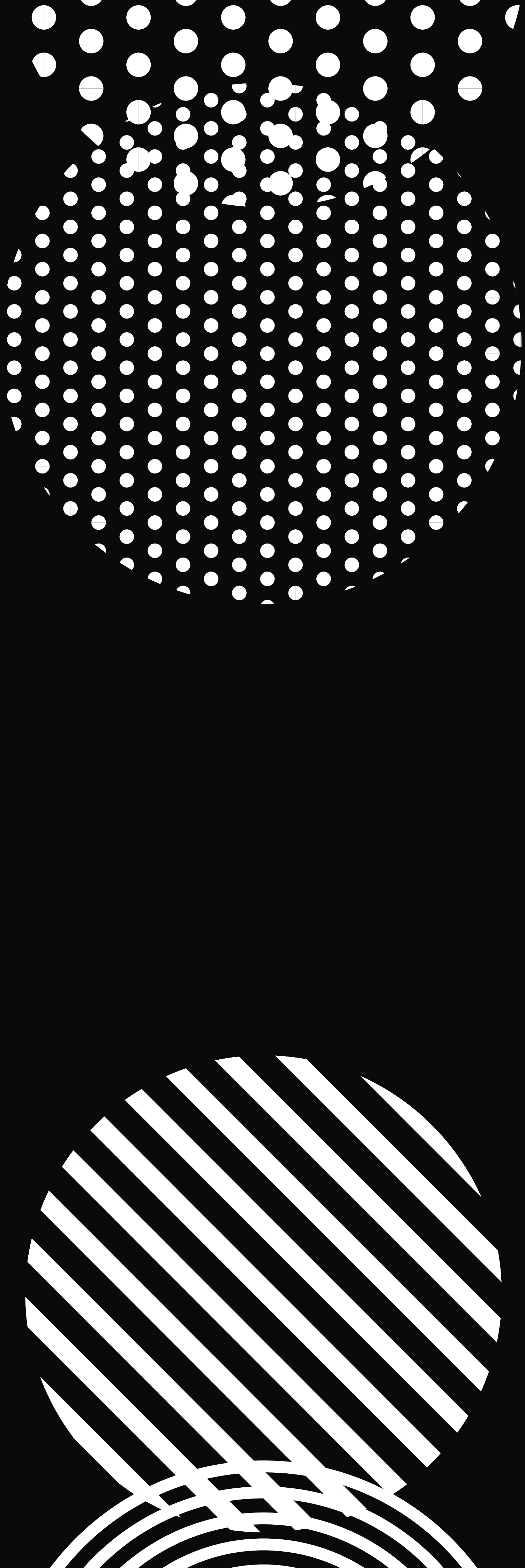

Exercice 4

$x > 0$

1) $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(xy^{-1})|$ pour $x>0, y>0$

$= |\log_{10}(\frac{x}{y})| = |\log_{10}(x) - \log_{10}(y)|$

$= |\log_{10}(y) - \log_{10}(x)|$ (prop de val. abs)

$= |\log_{10}(yx^{-1})| = d_{\log}(y,x)$

Soit $z>0$

$$d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(x) - \log_{10}(y)|$$
$$= |\log_{10}(x) - \log_{10}(z) + \log_{10}(z) - \log_{10}(y)|$$
$$\leq |\log_{10}(x) - \log_{10}(z)| + |\log_{10}(z) - \log_{10}(y)|$$
$$= d_{\log}(x,z) + d_{\log}(z,y)$$

$\forall x, y > 0$ $d_{\log}(x,y) \geq 0$ car val abs.

Supposons que $d_{\log}(x,y) = |\log_{10}(xy^{-1})| = 0$

$\rightarrow \log_{10}(xy^{-1}) = 0$

$\Rightarrow xy^{-1} = 1$

$\Rightarrow \underline{x = y}$

Donc $d_{\log}$ est bien une distance sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Soient $p, q \in \mathbb{Z}$

$$d_{log}(10^p, 10^q) = |\log_{10}(10^{p-q})| = |p-q|$$

3) Prenons $x = 1$ et $y = 10^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

Supposons qu'il existe $C > 0$ tq $d_{log}(x,y) \leq C|x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$

$d_{log}(x,y) = |\log_{10}(1 \cdot 10^n)| = |\log_{10}(10^n)| = |n|$

$|x-y| = |1 - 10^{-n}| = |1 - \frac{1}{10^n}|$

Alors $|n| \leq C \, |1 - \frac{1}{10^n}|$

$|n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $|1 - \frac{1}{10^n}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Absurde, car $\nexists\, C \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq C$

Donc $\nexists$ tel C.

4) On choisit $x = 1$ et $y = 10^n$

On a $|x-y| = |10^n - 1|$

$|\log_{10}(10^{-n})| = |n|$

Supposons par l'absurde qu'il existe $C > 0$ tq

$|x-y| \leq C \, d_{log}(x,y)$

i.e $|10^n - 1| \leq C\,|n|$

$\Rightarrow \frac{|10^n - 1|}{|n|} \leq C$

mais $\frac{|10^n - 1|}{|n|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et n'est pas borné,

donc il n'existe pas de tel C.