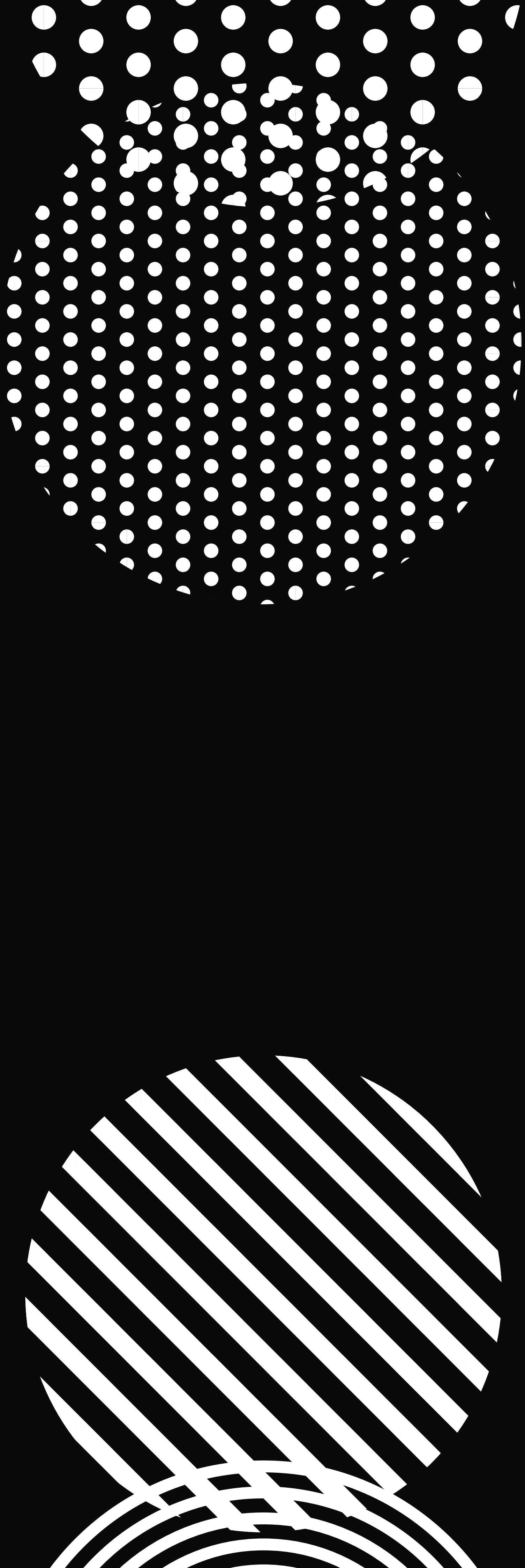


Excercice 1

$\mathcal{D}((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$

Soit $X_n = (x_n, y_n) \in E$ et $X = (x,y) \in E$

si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{D}(X_n, X) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x) + d(y_n,y) = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y_n,y) = 0$

Maintenant, supposons que $\forall n\in\mathbb{N}\; X_n \in \Gamma_f$ donc $X_n = (x_n, f(x_n))$

supposons que X_n cv vers $X = (x,y)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = y$ or f continue, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = y$

donc $X \in \Gamma_f$, ce qui conclut que Γ_f est fermé.

Excercice 2

$\mathcal{U} = \{ f \in C([0,1]; \mathbb{R}) : f(x) > 0,\ \forall x\, [0,1]\}$

Soit $f \in \mathcal{U}$, donc $f([0,1]) \subset]0,+\infty[$

donc la borne inférieure de l'image de f est 0.

Alors $\alpha = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) > 0$

2) Soit $f \in \mathcal{U}$. et $\alpha = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ prenons $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ on a $0 < \varepsilon < \alpha$

Supposons que $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$

Donc $\forall x\in[0,1]$ $g(x) > f(x) - \varepsilon > \alpha - \varepsilon = \frac{2\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} > 0$

Donc $\forall x \in [0,1]$ $g(x) > 0$

3) On a, $\forall f \in \mathcal{U}$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \subset \mathcal{U}$, ce qui signifie que $\mathcal{U}$ est ouvert.

Exercice 3

1) $\mathcal{U} = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$ dans $\mathbb{R}$

Conjecture : $Adh(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cup \{0\}$
$Int(\mathcal{U}) = \emptyset$

$\emptyset$ est ouvert et $\emptyset \subset \mathcal{U}$, donc
$\emptyset \subset Int(\mathcal{U})$

Mq $Int(\mathcal{U}) \subset \emptyset$ Soit $x \in \mathcal{U} \setminus \emptyset$ i.e $x \in \mathcal{U}$ donc $x = \frac{1}{2}$ avec $2 \in \mathbb{N}$

prenons $x_n = x + \frac{1}{\pi n}$, on a évidemment $x_n \notin \mathcal{U}$, mais comme $\frac{1}{\pi n} \to 0$

$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et donc $x \in Adh(\mathcal{U}^c)$, donc $x \notin Int(\mathcal{U})$

alors $Int(\mathcal{U}) = \emptyset$

On a $\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \cup \{0\}$

$(\mathcal{U} \cup \{0\})^c =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}[$ ouvert car une union des ouverts.

alors $\mathcal{U} \cup \{0\}$ est fermé.

Donc $Adh(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U} \cup \{0\}$
Mq $\mathcal{U} \cup \{0\} \subset Adh(\mathcal{U})$

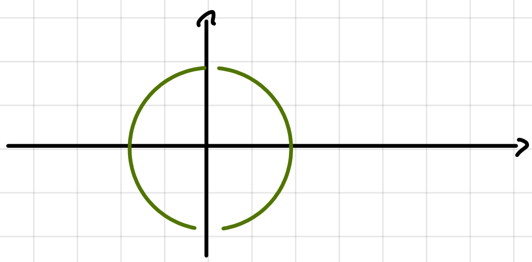
Soit $X \in \mathcal{U} \cup \{0\}$ si $X \in \mathcal{U}$, on prend $X_n = X$ et on a $X_n \to X$
donc supposons $X \in \{0\}$ i.e $X = 0$.

Prenons $x_n = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, évidemment, $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in \mathcal{U}$.

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X$, donc $X \in Adh(A)$

Alors $Adh(A) = \mathcal{U} \cup \{0\}$

2) $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}$



Conjecture : $Int(\mathcal{U}) = \emptyset$

$Adh(\mathcal{U}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} =: \Omega$

$\emptyset$ est ouvert est inclus dans $\mathcal{U}$, alors $\emptyset \subset Int(\mathcal{U})$

Mq $Int(\mathcal{U}) \subset \emptyset$

Soit $u \in \mathcal{U} \setminus \emptyset$ i.e $u \in \mathcal{U}$ donc $u = (x, y)$ tq $x^2+y^2=1$ et $x \neq 0$

Prenons $u_n = (1-\frac{1}{n})(x, y)$ $(1-\frac{1}{n})(x^2+y^2) < 1$ car $\forall n \geq 2$, $1-\frac{1}{n} < 1$ car $\frac{1}{n} \in]0,1[$

donc $\forall n \geq 2$, $u_n \notin \mathcal{U}$, mais $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} u$

donc $u \notin Int(\mathcal{U})$ $\forall u \notin \emptyset$

Donc $Int(\mathcal{U}) = \emptyset$

$\mathcal{U} \subset \Omega$ et notons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2+y^2$ une fonction continue car polynomiale.

On a $\Omega = f^{-1}(\{1\})$ or f est continue et $\{1\}$ fermé, donc Ω est l'image réciproque par $f \in C^0$ de fermé, donc Ω est fermé.

Alors $Adh(\mathcal{U}) \subset \Omega$

Montrons que $\Omega \subset Adh(\mathcal{U})$

Soit $X \in \Omega \setminus \mathcal{U}$ (car si $X \in \mathcal{U}$, on peut prendre $X_n = X$ dont la limite X, donc $X \in Adh(\mathcal{U})$)

Donc $X = (x, y)$ tq $x^2+y^2 = 1$ et $x = 0$

donc on a $0 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

alors prenons deux cas $X = (0, 1)$ et $X = (0, -1)$

1) Supposons $X = (0, 1)$, prenons $X_n = (\sqrt{\frac{1}{n}}, \sqrt{1-\frac{1}{n}})$

$x_n^2 + y^2 = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1$ car $\frac{1}{n} > 0$ et $1-\frac{1}{n} > 0$ car $\frac{1}{n} < 1$

Donc $X_n \in \mathcal{U}$, mais $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0, 1) = X$ donc $X \in Adh(\mathcal{U})$

2) Supposons $X = (0, -1)$, prenons $X_n = (\sqrt{\frac{1}{n}}, -\sqrt{1-\frac{1}{n}})$

où $x_n^2 + y_n^2 = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1$ donc $\forall n \geq 2$ $X_n \in \mathcal{U}$

Mais $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (0, -1) = X$ donc $X \in Adh(\mathcal{U})$

Donc $Adh(\mathcal{U}) = \Omega$

Exercice 4

$\arctan : \mathbb{R} \longmapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1) $\delta(x,y) \longmapsto |\arctan x - \arctan y|$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\delta(x,y) \geq 0$ car valeur absolue.

$\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x|$ car valeur absolue
$= \delta(y,x)$

$\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = 0 \Rightarrow \arctan x - \arctan y = 0$
$\Rightarrow \arctan x = \arctan y$
$\Rightarrow x = y$ car arctan bijective sur $\mathbb{R}$

Soit de plus $z \in \mathbb{R}$

$\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |(\arctan x - \arctan z) + (\arctan z - \arctan y)|$

$\leq |\arctan x - \arctan z| + |\arctan z - \arctan y|$ (par l'inégalité triangulaire de valeur absolue.)

$= \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Donc δ est bien est une distance.

2) Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}$ tq

$\Rightarrow$ Supposons $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$ or arctan est $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $\lim_{n\to+\infty} \arctan(x_n) = \arctan(x)$

donc $\lim_{n\to+\infty} d(\arctan(x_n), \arctan(x)) = \arctan x - \arctan x = 0$

donc x_n cv. pour δ

$\Leftarrow$
Supposons que $\lim_{n\to+\infty} \delta(x_n, x) = 0 = \lim_{n\to+\infty} |\arctan x_n - \arctan x|$

donc $\lim_{n\to+\infty} \arctan(x_n) = \arctan(x)$ or arctan bijective.

donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$

d'où x_n cv pour d.

3) $\mathbb{R}$ est fermé pour d, donc pour toute suite convergente vers un réel x, ce réel $\in \mathbb{R}$. D'après (2) cette suite cv. vers x pour δ aussi. Donc $\mathbb{R}$ est fermé pour δ.

$\forall x,y$ $\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, alors $\delta(x,y) = |\arctan x - \arctan(y)| \leq \underbrace{|\arctan x| + |\arctan y|}_{< \pi}$

Donc $\mathbb{R} \subset \mathcal{B}(0,\pi)$ donc $\mathbb{R}$ est bornée pour δ.

4) $x_n = n$ $\quad x_n \longrightarrow +\infty$ pour d. donc pour δ elle diverge aussi.

$\forall \varphi$ $\quad x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc pour δ aussi.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i} = -\frac{8}{3}$$

$$= \frac{X \quad +80}{1991 - 1976} = -\frac{8}{3}$$

$$X = -40 - 80 = -120$$

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_i + 2 - x_i}$$

$$-80 = \frac{6600 - x}{10}$$

-800

$$x = 6600 + 800 = 7400$$

$$7400 = \frac{592000 - x}{5}$$

$$x = 592000 - 7400 \cdot 5 = 555000$$

$$6600 = \frac{x - 592000}{5}$$

$$5400 = \frac{x - 625000}{5}$$

$$f_{x_0} + f[x_0, x_1](x - 1976) + f[x_0, x_1, x_2](x - 1976)(x - 1981)$$

555000 $\quad$ 7400 $\quad$ -80

$$-\frac{8}{3}(x - 1976)(x - 1981)(x - 1986)$$