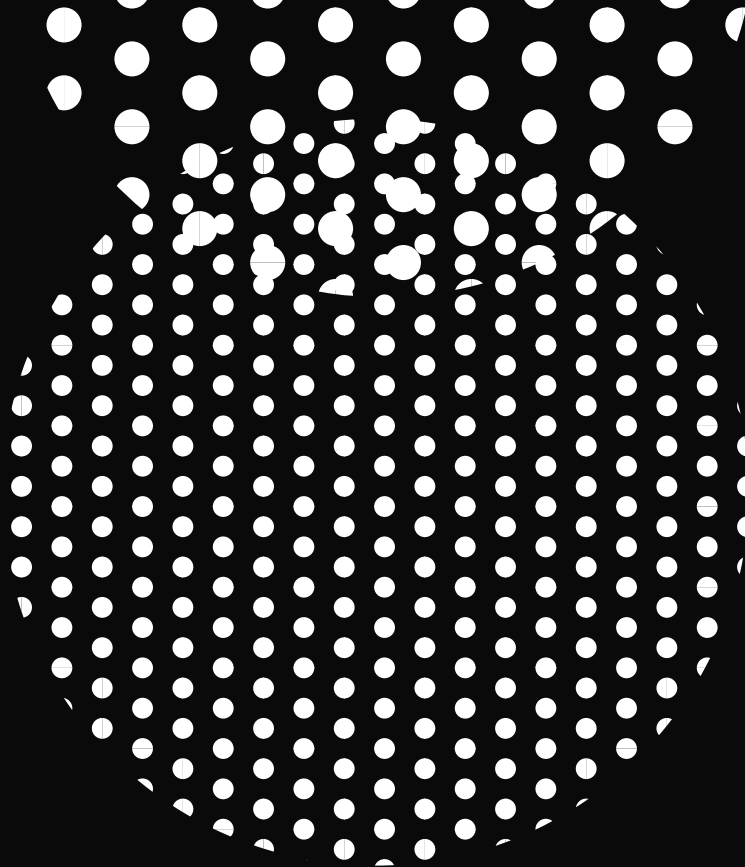




exercice 1

1) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathbb{R}$. Supposons que x_n cv vers x^* , alors elle est de Cauchy.

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, p \geq N \quad d(x_n, x_p) < \varepsilon \\ \Rightarrow |x_n - x_p| < \varepsilon$$

Supposons $\varepsilon < 1$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathbb{R} \quad (x_n - x_p) \in \mathbb{R}$ aussi.

donc seul nombre inférieur à 1 est 0.

$$\text{donc } |x_n - x_p| = 0 \Rightarrow \underline{x_n = x_p} \quad \underline{\forall n, p \geq N.}$$

Donc, à partir de N , x_n est constante.

2) a Supposons $(x_n, y_n) \in A$ convergente, donc les 2 suites x_n et y_n convergent

Or $\forall n, y_n \in \mathbb{N}^*$, donc d'après (1), à partir d'un certain rang $|y_n|$ est constante.

2) b Supposons $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, y_n = p_0$
 $\exists p_0 \in \mathbb{N}$

Comme $(x_n, y_n) \in A$, donc $\forall n \geq N \quad x_n \in [-1 + \frac{1}{p_0}, 1 - \frac{1}{p_0}]$

et or $[-1 + \frac{1}{p_0}, 1 - \frac{1}{p_0}]$ est fermé, alors $l_1 := \lim x_n \in [-1 + \frac{1}{p_0}, 1 - \frac{1}{p_0}]$

donc $(l_1, l_0) \in A$. Ce qui conclut que A est fermé.

$$\forall (x, y) \in A \quad p(x, y) = x, \quad P(A) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}, p \geq 1} [-1 + \frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}]$$

Soit (x_n) d'éléments de $P(A)$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in P(A)$
 $x_n \in \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} [-1 + \frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}]$

Prenons $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = 1 - \frac{1}{n}$, évidemment, $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in P(A)$
Par contre, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ et $1 \notin P(A)$

Alors, $P(A)$ n'est pas fermé.

Exercice 2

1) Prenons $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = x_0$
Or

2) a) Soit $\mathcal{U}_i, i \in \mathbb{J}$ un recouvrement ouvert
et $\mathcal{U}_{i_0}$ ouvert tq $\{l\} \in \mathcal{U}_{i_0}$

Or $\mathcal{U}_{i_0}$ est ouvert contenant l , $\exists \varepsilon > 0$ tq $B(l, \varepsilon) \subset \mathcal{U}_{i_0}$

De plus, par hypothèse, $x_n \rightarrow l$. Alors
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, d(x_n, l) < \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = \varepsilon$, alors $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0, d(x_n, l) < \varepsilon$,
par la définition de la boule ouverte cela signifie
que $\forall n \geq N_0, x_n \in B(l, \varepsilon)$ alors $x_n \in \mathcal{U}_{i_0}$.

b) Par (a) à partir de $N_0, \forall n \geq N_0, x_n \in \mathcal{U}_{i_0}$

Alors notons $B = \{x_n : n < N_0\}$ or $N_0 \in \mathbb{N}$, donc
 B est fini, alors B est compact, alors $\exists$ un sous
recouvrement fini $\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_n}$ ouvert de B

$\mathcal{U}_{i_1}, \dots, \mathcal{U}_{i_n} \cup \mathcal{U}_{i_0}$ couvre $A \cap \{l\}$, alors $A \cap \{l\}$ est compact.

Exercice 3

$$E = C([0, 1])$$

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{avec } f, g \in C([0, 1])$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \forall f, g \quad d_1(f, g) &\geq 0 \text{ car valeur absolue} \\ \text{idem} \quad d_1(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx \quad \text{car valeur absolue} \\ &= d_1(g, f) \end{aligned}$$

$$\text{soit } z \in C([0, 1])$$

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - z(x) + z(x) - g(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - z(x)| + |z(x) - g(x)| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - z(x)| dx + \int_0^1 |z(x) - g(x)| dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \\ &= d_1(f, z) + d_1(z, g) \end{aligned}$$

Maintenant, supposons $d_1(f, g) = 0 = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

Or $|f(x) - g(x)| \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ car val. abs, donc $\forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - g(x)| = 0 = f(x) - g(x)$

Donc $\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = g(x)$

Alors, si $d_1(f, g) = 0$, $f = g$

Par conséquent, d_1 est bien une distance de E .

Continuons avec l'étude de d_∞

premièrement, or on a sup de la valeur absolue, $\forall f, g \in E \quad d_\infty(f, g) \geq 0$.
donc d_∞ est défini positive

De même à cause de la valeur absolue $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f) \quad \forall g, f \in E$

Supposons $d_\infty(f, g) = 0 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ or la valeur absolue, donc toujours ≥ 0 , alors on a

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) - g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x)$$

donc si $d_\infty(f, g) = 0$ donc $f = g$

Soit le plus $z \in E$,

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - z(x) + z(x) - g(x)|$$

$$\text{Or } \forall x \in [0, 1] \quad |f(x) - z(x) + z(x) - g(x)| \leq |f(x) - z(x)| + |z(x) - g(x)|$$

$$\begin{aligned} \text{on a } d_\infty(f, g) &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - z(x)| + |z(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - z(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |z(x) - g(x)| \\ &= d_\infty(f, z) + d_\infty(z, g) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall f, g, z \in E \quad d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, z) + d_\infty(z, g)$$

Par conséquent d_∞ est bien une distance pour E .

$$2) \text{ Calculons } d_1(f_n, f) = \int_0^1 |x^n - 0| dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 |x^n| dx = \int_0^1 x^n dx \quad \text{car } x \in [0, 1] \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} d_1(f_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{donc } f_n \text{ converge vers } f \text{ pour } d_1$$

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n| = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1^n \quad \text{car } x^n \text{ strictement croissante sur } [0, 1]$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(o(f_n, f)) = 1$, donc f_n ne converge pas vers f pour d_o .

Exercice 4

Soient $K_1, K_2 \subset (E, d)$ compacts. Montrons que $K_1 \cup K_2$ est aussi compact.

Or K_1 est compact, $\forall \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ ouvert tq $K_1 \subset \mathcal{U}$

$\exists U_1, \dots, U_n$ un nombre fini tq $K_1 \subset U_1 \cup \dots \cup U_n =: U'$

Idem pour K_2 $\forall V = \bigcup_{i \in J} V_i$ tq $K_2 \subset V$ $\exists V_1, \dots, V_q$ un nombre fini

tq $K_2 \subset V_1 \cup \dots \cup V_q =: V'$

Soit maintenant $\mathcal{Q}$ un recouvrement ouvert de $K_1 \cup K_2$,

Alors $K_1 \cup K_2 \subset (U' \cup V') \cap \mathcal{Q}$

Donc pour $K_1 \cup K_2$ on peut choisir $\mathcal{U}' \cup \mathcal{V}'$.

et alors $K_1 \cup K_2$ est compact.