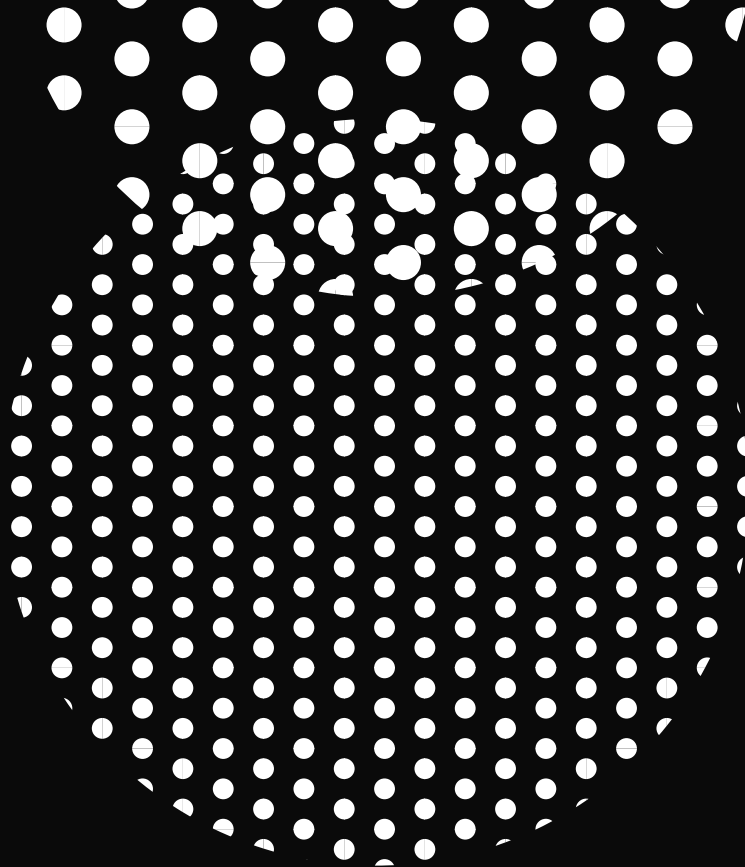




Exercise 1

(Partiel 23-24 / déjà fait)

Exercice 2

1) Soit $f: E_1 \rightarrow E_2$ continue et $A \subset E_1$

Soit $a \in \text{Adh}(A)$ si $a \in A$, alors $f(a) \in f(A) \subset \text{Adh}(f(A))$

si $a \notin A$ alors $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A tq
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Or f continue $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$

Donc notons $y_n \in f(A)$ tq $y_n = f(a_n)$

donc $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) \in \text{Adh}(f(A))$

Alors $\forall a \in \text{Adh}(A)$ $f(a) \in \text{Adh}(f(A))$

donc $f(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(f(A))$

2) $f: E_1 \rightarrow E_2$ pas continue en $x \in E_1$ et

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ mais $f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

(a) On peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui
par l'unicité de limite converge vers x .
i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x$

Comme f n'est pas continue et $f(x_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

donc $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$

$\forall n, \exists p$ tq $x_{\varphi(n)} = x_p$ donc $d(f(x_{\varphi(n)}), f(x)) \geq \varepsilon$

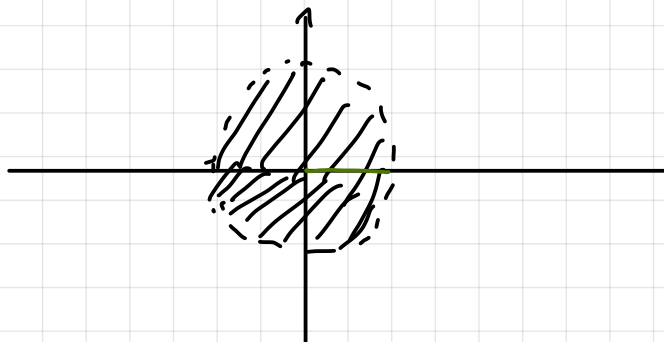
b) $A = \{x_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N}\}$

$\text{Adh}(A) = A \cup \{x\}$

$f(x) \notin \text{Adh}(f(A))$ car aucune suite ne converge vers $f(x)$

Exercice 3

$$\mathcal{D} = \overbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}}^A \setminus \overbrace{\{(t,0) : t \in [0,1]\}}^B$$



Conjecture : $\text{Adh}(\mathcal{D}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\text{Int}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$$

$$B \subset A$$

Donc $\mathcal{D}^c = (A \setminus B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$

$$(1,0) \in A^c, \text{ donc } \underbrace{B \cup \{1,0\}}_{=: \text{Adh}(B)} \subset \mathcal{D}^c$$

$\mathcal{D}^c$ est fermé car l'union des fermés car $B \cup \{1,0\}$ fermé et A^c fermé car l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Or $\mathcal{D}^c$ est fermé, $\mathcal{D}$ est ouvert, ce qui conduit que $\mathcal{D} = \text{Int}(\mathcal{D})$

Notons $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} =: f^{-1}([-\infty, 1])$ où $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$
 donc Ω fermé.

De plus $\mathcal{D} \subset \Omega$ donc $\text{Adh}(\mathcal{D}) \subset \Omega$, il nous reste à montrer que $\Omega \subset \text{Adh}(\mathcal{D})$

Soit $X \in \Omega \setminus \mathcal{D}$ i.e. $X = (x,y)$ + (1) $x^2 + y^2 = 1$ et $y \neq 0$
 (2) où $y = 0$ et $x \in [0,1]$

(1) $X_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $X_n \in \mathcal{D}$ mais $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ donc $X \in \text{Adh}(\mathcal{D})$

(2) $X_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{x_n}{n}) \in \mathcal{D}$ car $\forall n, x_n \in [0,1]$ et $y_n \neq 0$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}_{\in [0,1]} \underbrace{x_n^2}_{\in [0,1]} + \underbrace{\frac{x_n^2}{n^2}}_{\forall n \in \mathbb{N}^*} = x^2 - \frac{2x^2}{n} + \frac{x^2 + x^2}{n^2} \geq \underline{x^2 - \frac{2x^2}{n} < 1}$$

$X_n \in \mathcal{D}$ et $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ et donc $X \in \text{Adh}(\mathcal{D})$ donc $\text{Adh}(\mathcal{D}) = \Omega$

2) $\mathcal{D}$ ouvert et $\mathcal{D} \subset \text{Adh}(\mathcal{D})$ donc $\mathcal{D} \subset \text{Int}(\text{Adh}(\mathcal{D}))$

Exercice 4

$$A = f^{-1}([0, +\infty[) \text{ ouvert}$$

$$B = f^{-1}([0, +\infty]) \text{ fermé}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ si } f(x) > 0 \text{ donc } f(x) \geq 0 \text{ et } x \in B$$

$$\text{donc } A \subset B, \text{ le plus } A \text{ ouvert, alors } A \subset \text{Int}(B)$$

$$\text{Soit } f(x) = 0$$

$$\text{d'où } A = \emptyset$$

$$B = \mathbb{R} \quad \text{Int}(B) = \mathbb{R}$$

$$\text{et } \mathbb{R} \neq \emptyset \text{ donc } \text{Int}(B) \neq A$$