Exercice 1

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$$

Soit $X_n = (2 + \frac{\sqrt{2}}{n}, 2) \in A$ car $x_n \notin \mathbb{Q}$ et $y_n \in \mathbb{Q}$

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (2,2) \notin A$ donc A n'est pas fermé.

Or $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Alors $\forall \delta > 0$ et $X = (x_0, y_0) \in A$, $\exists$ $X'(x', y') \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

tq $d(X, X') < \delta$

donc $B(X, X') \notin A$ alors A n'est pas ouvert.

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 4\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq xy \leq 4\}$

On $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto xy$ application continue.

Or $B = f^{-1}([-4,4])$ image réciproque d'un fermé par une application continue, donc B est fermé.

Soit (x,y) tq $xy = 4$

$B((x,y), r)$ $d((xy), (x + \frac{1}{n}, y)) < r$

mais $(x + \frac{1}{n})y > 4$

Donc B n'est pas ouvert.

B n'est pas borné.

Soit $X_n (4 \cdot n, \frac{1}{n}) \in B$ $4n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc B n'est pas borné.

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \} \cap \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 0 \}$

fermé.

Exercice 2

$$\mathcal{D} = \underbrace{\{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 2 \}}_{A} \cap \underbrace{\{ (x,y) : (x-1)^2+y^2 \geq 1 \}}_{B}$$

$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto (x-1)^2+y^2$

$A = f_1^{-1}(]-\infty, 2])$
$B = f_2^{-1}([1, +\infty[)$

fermé car image réciproque d'un fermé par une application continue

Or $\mathcal{D} = A \cap B$ une intersection des fermé, $\mathcal{D}$ lui-même est fermé, donc $Adh(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Conjecture :

$\Omega := Int(\mathcal{D}) = \{ (x,y) : x^2+y^2 < 2 \text{ et } (x-1)^2+y^2 > 1 \}$

$\Omega \subset \mathcal{D}$ et Ω est ouvert car l'intersection des ouverts (idem par image réciproque des ouverts par f_1, f_2 continue)

Donc $\Omega \subset Int(\mathcal{D})$ Il nous reste à montrer que $Int(\mathcal{D}) \subset \Omega$

Soit $X \in \mathcal{D} \setminus \Omega$ i.e $X = (x,y)$ tq $x^2+y^2 = 2$ ou $(x-1)^2+y^2 = 1$

si $x^2+y^2 = 2$
$X_n = (x+\frac{1}{n}, y)$ $(x+\frac{1}{n})^2 + y^2 > 2$ donc $X_n \notin \mathcal{D}$ mais $X_n \longrightarrow X$
donc $X \notin Int(\mathcal{D})$

si $(x-1)^2+y^2 = 1$

$X_n = \frac{1}{n} X < 1$ donc $X_n \notin \mathcal{D}$ mais $X_n \longrightarrow X$
donc $X \notin Int(\mathcal{D})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin D$ mais $x_n \to x$ donc $x \notin \mathrm{Int}(D)$

Alors $\mathrm{Int}(D) = \emptyset$

<u>Exercice 3</u>

1) $d(a,F) = \inf\limits_{f \in F} \{ d(a,f) \}$

2) On suppose que $d(a,F) = 0 = \inf\limits_{f \in F} \{ d(a,f) \}$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de F tq

$\lim\limits_{n \to +\infty} d(a,x_n) = 0$ $\qquad d(a,b) = 0$ ssi $a = b$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a,x_n) = 0$ ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$

3) $\Rightarrow$ Supposons que $d(a,F) = 0$, donc d'après 2)

$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F tq $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$

donc $a \in \mathrm{Adh}(F)$ par la caractérisation séquentielle.

$\Leftarrow$ Supposons que $a \in \mathrm{Adh}(F)$

Donc par la caractérisation séquentielle, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in F$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$

par la continuité de la distance $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n,a) = d(a,a) = 0$

Or la distance est définie positive,

donc $\forall a,b \in E$ $d(a,b) \geq 0$

donc $d(a,F) = \inf\limits_{f \in F} \{ d(a,f) \} = 0$

<u>Exercice 4</u>

$X =]0,1[$ $\qquad d(x,y) = |x-y|$

1) $X \setminus X = \emptyset$ donc X est fermé, car $\emptyset$ ouvert.

$\forall x,y \in X$, $|x-y| < 1$ donc $X \subset B(\frac{1}{2}, 4)$

donc X est borné.

2) Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n \in X$, mais

x_n diverge car elle n'a pas de limite.

$\forall \varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tq φ st. $\nearrow$ $x_{\varphi(n)}$ diverge aussi. Donc X n'est pas compact.