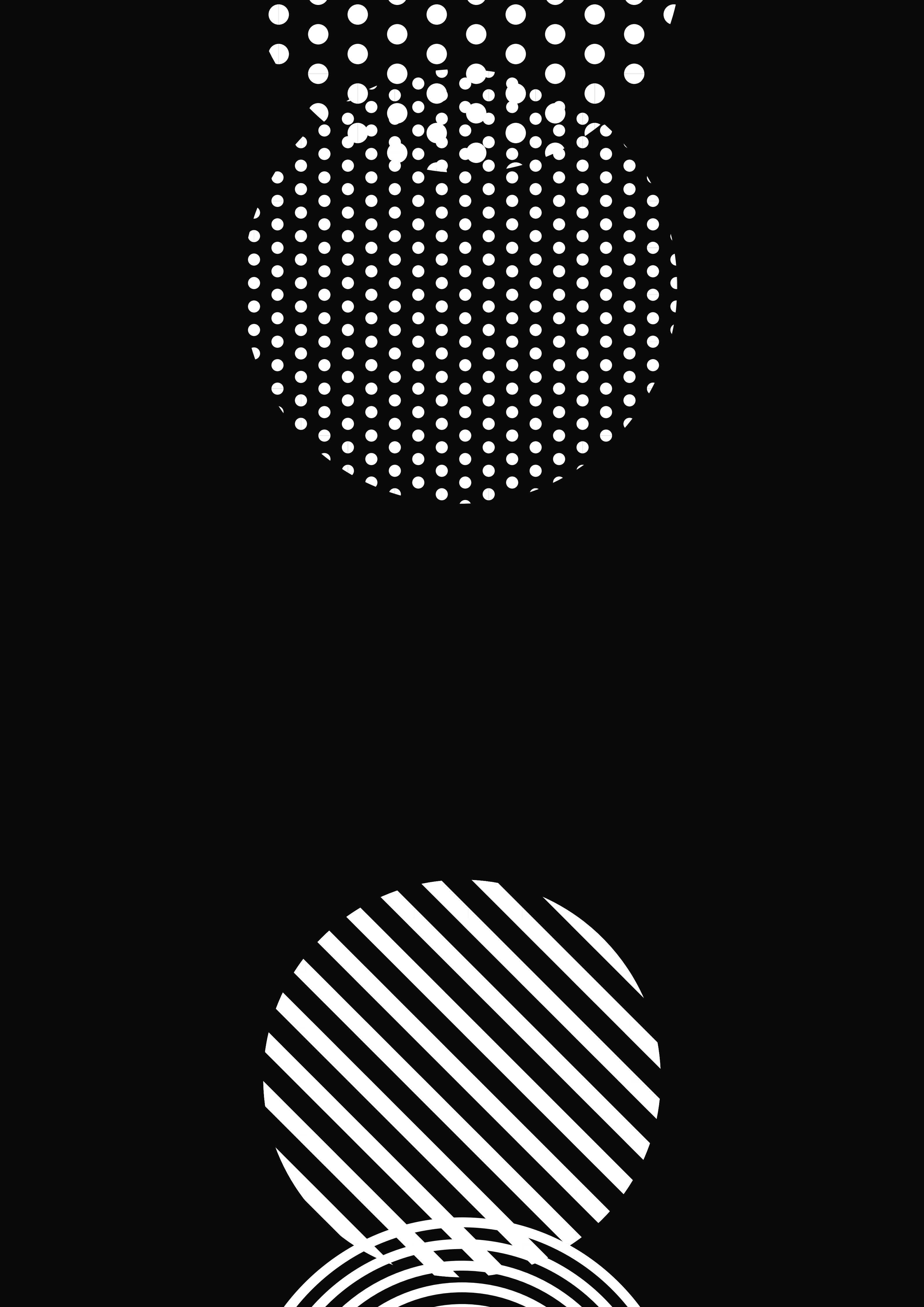

Exercice 1

1.1) $x'(t) = x(t)(2-y(t))$

Si $y(t)$ est petit (<1) $x'(t) \simeq x(t)$ ou même $2x(t)$
si $y(t)$ est grand $x'(t)$ est négatif donc $x(t)$ se diminue. Alors ce sont les $y(t)$ qui chassent.

Donc $y(t)$ prédateur.

$y'(t) = y(t)(x(t)-1)$ si $x(t) < 1$ donc $y(t)$ se diminue,
si $x(t) > 1$ donc $y(t)$ augmente.

Alors $x(t)$ est un proie, $y(t)$ prédateur.

Question 2.1

2.1.1 $\begin{cases} x'(t) = x(t)(2-y(t)) \\ y'(t) = y(t)(x(t)-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

$$-\frac{x'}{x} + x' = -\frac{x(2-y)}{x} + x(2-y)$$

$$= -(2-y) + x(2-y)$$

$$= (2-y)(x-1) = 2(x-1) - y(x-1)$$

$$= 2(x-1) - y'$$

$$= 2\frac{y'}{y} - y'$$

$$H(x,t) = \left(\log(x(t)) + 2\log(y(t)) - x(t) - y(t)\right)'$$

$$= \frac{x'(t)}{x(t)} + 2\frac{y'(t)}{y(t)} - x'(t) - y'(t)$$

$$= \frac{x'(t)}{x(t)} - x'(t) - \frac{x'(t)}{x(t)} + x'(t) = 0$$

Donc H est constante, pour obtenir cette constante, on prend les données initiales et on obtient
$C = \log(x_0) + 2\log(y_0) - x_0 - y_0$

Question 2-1-2

$$x' = r'\cos(\theta) - r\theta'\sin\theta \qquad \begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = 2 + r\sin\theta \end{cases}$$

$$y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta$$

mais aussi

$$x' = x(2-y) = (1+r\cos\theta)(2-(2+r\sin\theta)) = (1+r\cos\theta)(-r\sin\theta)$$
$$y' = y(x-1) = (2+r\sin\theta)(1+r\cos\theta - 1) = (2+r\sin\theta)(r\cos\theta)$$

$$x'y - y'x = (r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)(2+r\sin\theta) - (r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)(1+r\cos\theta)$$

$$= \underline{2r'\cos\theta} - 2r\theta'\sin\theta + \underline{rr'\sin\theta\cos\theta} - r^2\theta'\sin^2\theta$$

$$\underline{- r'\sin\theta} - r\theta'\cos\theta \underline{- r'r\sin\theta\cos\theta} - r^2\theta'\cos^2\theta$$

$$= r'(2\cos\theta + \cancel{r\sin\theta\cos\theta} - \sin\theta - \cancel{r\sin\theta\cos\theta})$$

$$+ \theta'(-2r\sin\theta - r^2\sin^2\theta - r\cos\theta - r^2\cos^2\theta)$$

$$= \theta'(-2r\sin\theta - r\cos\theta - r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta))$$

$$= \theta'(-r(2\sin\theta + \cos\theta + r))$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 15 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$a_0 = 1$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 14 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 39 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 9 & 13 \end{array}\right]$$

$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 7$$
$$a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 13$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$a_3 = 1$

$a_2 = 4 - 3 = 1$

$a_1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$

Donc $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$

$P(2) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$P(3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$

$P(4) = 1 + 4 + 16 + 64$
$= 85$

Exercice 2

2.1

$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$ $\Lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda_n(x)|$

$P_n(f\,;x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)$

$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$

2.1.1 Notons $Q = \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i)|$

Donc $\forall i \leq n,\ f(x_i) \leq Q$

$\forall x \in \mathbb{R}\ |P_n(f;x)| = |\sum f(x_i)\, L_i| \leq |Q \sum L_i|$

$\leq |Q\, \Lambda_n| = Q\, \Lambda_n$

donc $\|P_n(f;\cdot)\|_\infty \leq \Lambda_n \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i)|$

2.1.2:

1. $P_n(f;\cdot) - f = P_n(f;\cdot) - \phi_n + \phi_n - f$

alors $|P_n(f;\cdot) - f| \leq |P_n(f;\cdot) - \phi_n| + |f - \phi_n|$

donc $\|P_n(f;\cdot) - f\|_\infty \leq \|P_n(f - \phi_n;\cdot)\|_\infty + \|f - \phi_n\|_\infty$

2.