



1.0 Modèles discretes

On désigne par $N(t)$ la population d'individus à l'instant t .

Equation du modèle discret

$$\underbrace{N(t + \Delta t) - N(t)}_{\text{variation de la population}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de naissances}} - \underbrace{m}_{\text{nombre de décès}} + \underbrace{i}_{\text{immigration}} - \underbrace{e}_{\text{émigration}}$$

sol de migration

1.1 Modèle de croissance géométrique

- Hypothèse:
- solde migration nul: $i - e = 0$
 - nombre de croissance proportionnel à la taille de la population $n = \lambda \Delta t N(t)$
↑
taux de natalité
 - Idem pour le nombre de décès $m = \mu \Delta t N(t)$
↑
taux de mortalité

Modèle: On pose $N_n = N(t_n)$ la taille de la population à l'instant t_n

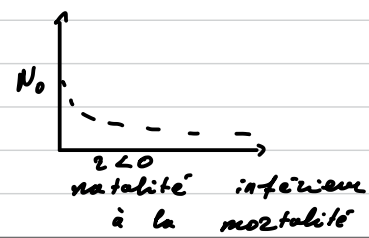
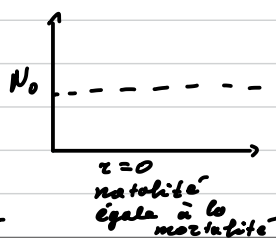
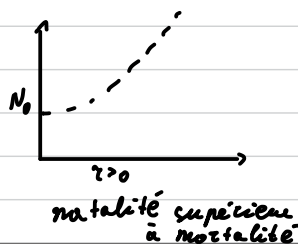
$$N_{n+1} - N_n = \lambda \Delta t N_n - \mu \Delta t N_n$$

on pose $z = \lambda - \mu$ taux de croissance

(C.G) $N_{n+1} = (1 + z \Delta t) N_n, \quad n = 0$
 N_0 donné: taille initiale de la population.

Solution: $N_n = (1 + z \Delta t)^n N_0, \quad n \in \mathbb{N}$

Visualisation: Δt fixe



Propriétés

- Lorsque $t \rightarrow 0$, la population semble tendre vers une courbe $N(t) = N_0 e^{rt}$, solution de
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$
- Si $r > 0$, la population croît indéfiniment.
- Si $r < 0$, il y a extinction de l'espèce.

Inconvénients

- i.) Une croissance infinie n'est pas réaliste.
- ii.) Pour être rigoureux, on devrait écrire $E(rN_n)$ i.e. partie entière.

I.2 Modèles continus

Motivation: L'observation qui prend Δt proche de 0 aura beaucoup plus d'information.

RQ le modèle de croissance géométrique

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \lambda \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t)$$
$$\Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

en faisant $\Delta t \rightarrow 0$

$$N'(t) = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

Dérive l'équation des modèles continus

$$\underbrace{N'(t)}_{\text{vitesse de variation}} = \underbrace{n(t)}_{\text{vitesse de naissance}} - \underbrace{m(t)}_{\text{vitesse de décès}} + \underbrace{i(t)}_{\text{vitesse d'immigration}} - \underbrace{e(t)}_{\text{vitesse d'émigration}}$$

1.1 Modèle Malthus

- Hypothèse:
- Solde migration nul: $i(t) - e(t) = 0$
 - Vitesse de naissance proportionnel à la population à l'instant t $n(t) = \lambda N(t)$
 - Vitesse de décès $m(t) = \mu N(t)$

Modèle:
$$\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Solution: $N(t) = N_0 e^{(\lambda - \mu)t}$

- Propriétés:
- il peut être vu comme limite du modèle de croissance géométrique.
 - Lorsque $r = \lambda - \mu > 0$ croissance est proportionnel
 - Lorsque $r = \lambda - \mu = 0$ la population n'évolue pas
 - Lorsque $r = \lambda - \mu < 0$ la population tend vers 0.

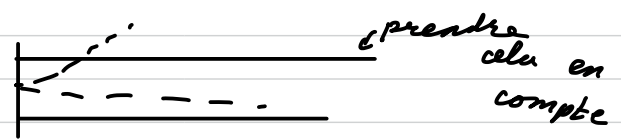
Inconvénients

- Croissance exponentielle pas réaliste
- Il faut prendre en compte
- la limitation des ressources
 - l'interaction avec l'environnement.

I.2.2 Modèle Verhulst

- Corrige le modèle de Malthus en prenant en compte la limitation des ressources

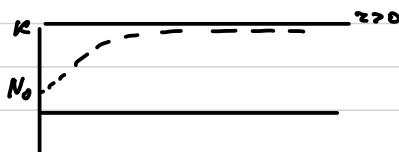
Idee: limiter la croissance à un seuil K appelé "capacité biotique"

$$N'(t) = rN(t)$$


prendre cela en compte

Verhulst:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$



hyp:

Solde de migration nul

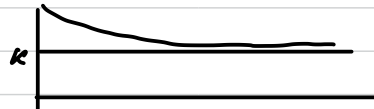
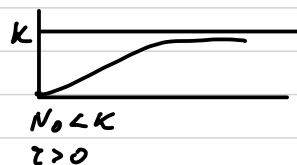
• taux de natalité: fonction affine décroissante de la population $\lambda \approx \lambda \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

• taux de mortalité: fonction affine croissante de la population $\mu = -\mu \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

Modèle:
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Solutions:
$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} \quad t \geq 0$$

Visualisation:



Propriétés

Si $\tau > 0$ on a :
• Si $N_0 = 0$ $N_0 = K$ on a
 $N(t) = N_0 \quad \forall t > 0$

- Si $0 < N_0 < K$, $N \nearrow$
- Si $N_0 > K$, $N \searrow$
- N possède une limite si $N_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$$

I.3 Modèle de croissance logistique
C'est un modèle discret

hyp: i.e = 0

• n-m est une fⁿ affine de la population
i.e $n-m = \tau \Delta t N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

Modèle: On suppose $\Delta t = 1$; On pose $N_n = N(t_n)$
on a
$$\begin{cases} N_{n+1} - N_n = \tau N_n \left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \\ N_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Propriétés: (À vérifier numériquement)

- Si $\tau < 2$, la suite converge vers K
plus $\tau < 2$ mais la suite converge
- Si $2 < \tau < 2.449$ la suite converge vers
un cycle
- Si $2.449 < \tau < 2.57$ la suite est encore un cycle
mais plus complexe
- Si $\tau > 2.57$ la suite devient chaotique

RQ: Exercise