



Exercice 1

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u(n)|$$

$\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ = l'ensemble des suites bornées

$\ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$ = suites nulles à partir d'un certain rang

$\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ = suites tendant vers 0

1) Soit
$$v_p(n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n \geq p+1 \end{cases}$$

$v_p(n)$ n'est jamais 0 mais pour

p fixé à partir de p $v_p(n)$ est 0 donc
 $\forall p \in \mathbb{N} \ v_p \in \ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$ mais sa limite n'appartient pas

à $\ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$ donc $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ n'est pas fermé.

Soit $\varepsilon > 0$, $v \in \ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$

$$B(v, \varepsilon) = \{u_p \in \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \mid \|v_p - u_p\|_{\infty} < \varepsilon\}$$

Notons $u_p(n) = v_p(n) - \frac{\varepsilon}{2}$

alors comme v_p est nulle à partir d'un certain rang, donc u_p est constante de valeur $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $u_p \notin \ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$

mais $\|v_p - u_p\| = \|v_p - v_p + \frac{\varepsilon}{2}\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc $u_p \in B(v_p, \varepsilon)$

d'où $\ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$ n'est pas ouvert.

$\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$

$\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ n'est pas ouvert avec la même preuve,
car $u_p \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \neq 0$ donc $u_p \in \ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$

Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$

$$\text{tg } u_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \ell$$

$$\text{donc } \|u_p - \ell\|_{\infty} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Or } \forall p \in \mathbb{N}, u_p(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) - \ell(n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \ell$$

$$\text{mais } \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(n) = 0$$

donc ℓ tend aussi vers 0, d'où
 $\ell \in \ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ et donc $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ est fermé.

2]

$$\text{Soit } u \in \ell_0^{\infty}(\mathbb{N}) \quad \text{donc } u(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{i.e } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tg } \forall n \geq N |u(n)| < \varepsilon$$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0, \text{ donc } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tg } \forall n \geq N |u(n)| < \varepsilon$$

$$\text{notons } \forall n \in \mathbb{N}, v(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n < N \\ 0 & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{array}{ll} \text{si } n < N & |u(n) - v(n)| = 0 \\ \text{si } n \geq N & |u(n) - v(n)| = |u(n)| < \varepsilon \end{array}$$

$$\text{d'où } \|u - v\|_{\infty} < \varepsilon$$

de plus comme à partir d'un certain rang v est nulle, $v \in \ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0, \forall u \in \ell_0^{\infty}(\mathbb{N}), \exists v \in \ell_c^{\infty}(\mathbb{N}) \text{ tg } \|u - v\|_{\infty} < \varepsilon$$

donc $\ell_c^{\infty}(\mathbb{N})$ est bien dense dans $\ell_0^{\infty}(\mathbb{N})$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$

3) $A \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{N})$ $A = \text{"ensemble des suites croissantes bornées"}$
 si $u \in A$,
 $\forall n, p \in \mathbb{N} \quad n \geq p \Rightarrow u(n) \geq u(p)$ | déf de croissante

Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A
 convergentes vers $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{i.e. } u_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} l \quad \Rightarrow \quad \|u_p - l\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

Supposons par l'absurde que $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante

$$\text{i.e. } \exists p \in \mathbb{N}, \quad l(p+1) < l(p) \Leftrightarrow l(p) > l(p+1)$$

$$\text{notons } \sigma = |l(p) - l(p+1)|$$

Soit $\varepsilon > 0$, alors comme u cr vers l
 $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq N$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_p(n) - l(n)| < \varepsilon \\ \text{et } |u_p(n+1) - l(n+1)| < \varepsilon$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tq $l(k) > l(k+1)$

$$\text{posons } \varepsilon = \frac{\sigma}{4}$$

$$u_p(k) \in]l(k) - \varepsilon, l(k) + \varepsilon[$$

$$u_p(k+1) \in]l(k+1) - \varepsilon, l(k+1) + \varepsilon[$$

$$u_p(k) > l(k) - \varepsilon \quad \text{et} \quad u_p(k+1) < l(k+1) + \varepsilon \\ \Rightarrow -u_p(k+1) > -l(k+1) - \varepsilon$$

$$\Rightarrow u_p(k) - u_p(k+1) > l(k) - l(k+1) - 2\varepsilon \\ = \sigma - \frac{\sigma}{2} \\ = \frac{\sigma}{2}$$

$$\Rightarrow u_p(k) > \frac{\sigma}{2} + u_p(k+1) \Rightarrow u_p(k) > u_p(k+1)$$

Absurde car on a supposé que u croissante. Par conséquent, l est aussi croissant, d'où A est fermé pour $\|\cdot\|_\infty$

4) Soient $u_1, u_2 \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

$$\text{tg } \begin{array}{l} u_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \in \mathbb{R} \\ u_2(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Soit $v = u_1 - u_2$ d'où par combinaison des limites $v \longrightarrow \ell = \ell_1 - \ell_2$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, |v(n)| \leq \|v\|_\infty$, donc par passage à la limite $|\ell_1 - \ell_2| \leq \|u_1 - u_2\|_\infty$

$\mathcal{L} = \{ \text{la suite tg } u \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \}$

Soit $u \in \mathcal{L}$ donc

$\exists \ell \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tg } \forall n \geq N, |u(n) - \ell| < \varepsilon$

alors $|u(n)| \leq \max \{ |u(0)|, |u(1)|, \dots, |u(N-1)|, \ell + \varepsilon \}$

donc u est bornée, alors $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

Soit $(v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}$

et que $v_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \ell_v$

i.e $\|v_p - \ell_v\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$

$$\|v_p - \ell_v\|_\infty < \varepsilon$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = \ell_v$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\lim_{p \rightarrow +\infty} v_p(n)}_{= \ell} = \ell_v(n)$$

car convergente donc ℓ_v

convergente et $\mathcal{L}$ fermé

5]

$$u_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq n \\ 1 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$ fixe $u_p(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

mais $\|u_p - 0\|_\infty \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$

Exercice 2

Soit $x \in \text{Vect}(\text{Adh}(A))$

i.e $x = \sum a_i x_i$ avec $x_i \in \text{Adh}(A)$

Oz $\forall i: x_i \in \text{Adh}(A)$ donc $\exists (u_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$

d'éléments de A tq

$$u_n^{(i)} \longrightarrow x_i$$

$$\text{Donc } \sum_i a_i u_n^{(i)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_i a_i x_i = x$$

Oz $\forall i: u_n^{(i)}$ est d'éléments de A

alors $\sum_i a_i u_n^{(i)} \in \text{Vect}(A)$

Oz x est une limite d'une suite $\sum_i a_i u_n^{(i)} \in \text{Vect}(A)$

donc $x \in \text{Adh}(\text{Vect}(A))$

Exercice 3

$A, B, C \subset E$

1) Supposons $C \subset B$.

cas 1: $A \cap C \neq \emptyset$ donc $d(A, C) = 0$ or $C \subset B$ donc $d(A, B) = 0$

cas 2: $A \cap B \neq \emptyset$ mais $A \cap C = \emptyset$ alors $d(A, B) = 0$
et $d(A, C) \geq 0$ alors $d(A, B) \leq d(A, C)$

cas 3: $A \cap B = \emptyset$

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A, \\ b \in B}} \{ d(a, b) \}$$

$$\forall b \in B, d(A, b) \geq d(A, B)$$

$$\text{Or } \forall c \in C, c \in B, \text{ alors } \forall c \in C \quad d(A, c) \geq d(A, B)$$

$$\text{d'où } d(A, C) \geq d(A, B)$$

2] Soit $\bar{a} \in \bar{A}, \bar{b} \in \bar{B}$, alors $\exists a_n$ d'éléments de A
 b_n d'éléments de B

$$\text{tq } \begin{matrix} a_n & \longrightarrow & \bar{a} \\ b_n & \longrightarrow & \bar{b} \end{matrix}$$

Par la continuité de la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, b_n) = d(\bar{a}, \bar{b})$

$$\text{Alors } \forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}, \bar{B} \quad \exists a_n, b_n \text{ tq } d(a_n, b_n) \longrightarrow d(\bar{a}, \bar{b})$$

$$\text{D'où } d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$$

Autre solution

D'après 1, comme $A \subset \bar{A}$ et $B \subset \bar{B}$

$$d(\bar{A}, \bar{B}) \leq d(A, B)$$

Alors, il nous reste à montrer que

$$d(A, B) \geq d(\bar{A}, \bar{B})$$

Soit $\bar{a} \in \bar{A}$ et $\bar{b} \in \bar{B}$, donc $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B

$$\text{tq } \begin{matrix} a_n & \longrightarrow & \bar{a} \\ b_n & \longrightarrow & \bar{b} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} d(\bar{a}, \bar{b}) &= \|\bar{a} - \bar{b}\| \\ d(a_n, b_n) &= \|a_n - b_n\| \end{aligned}$$

Par la continuité de la distance $d(a_n, b_n) \longrightarrow d(\bar{a}, \bar{b})$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(a_n, b_n) \geq d(A, B)$ et

Soit $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$$|\|a_n - b_n\| - \|\bar{a} - \bar{b}\|| \leq \varepsilon \Rightarrow \|a_n - b_n\| < \|\bar{a} - \bar{b}\| + \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

$$d(A, B) \leq \|a_n - b_n\| \leq \|\bar{a} - \bar{b}\|$$

$$\Rightarrow d(A, B) \leq \|\bar{a} - \bar{b}\|$$

$$\text{Donc } d(A, B) \leq d(\bar{A}, \bar{B})$$

$$\text{Par conséquent } d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$$

Exercice 4

$$E \text{ e.v.} \quad F \subset E \text{ s.e.v.}$$

$$\begin{aligned} \text{1)} \quad & \text{Soit } \bar{x} \in \text{Adh}(F) \quad \text{alors } \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } F \\ & \bar{y} \in \text{Adh}(F) \quad \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } F \\ & \text{t.q. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x} \\ & y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{y} \end{aligned}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \bar{x} + \bar{y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda x_n + y_n \quad \text{or } F \text{ est un e.v.}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \lambda x_n + y_n \in F$$

$$\text{or } \lambda x_n + y_n \rightarrow \lambda \bar{x} + \bar{y} \quad \text{donc } \lambda \bar{x} + \bar{y} \in \text{Adh}(F)$$

$$\text{alors } \text{Adh}(F) \text{ est bien un s.e.v.}$$

$$\text{2)} \quad \text{Supposons que } \text{Int}(F) = \emptyset$$

$$\text{i.e. } \forall x \in \text{Int}(F), \exists \varepsilon > 0 \text{ t.q.}$$

$$B(x, \varepsilon) \subset F$$

$$\text{Il faut montrer que } E \subset F$$

$$\text{Soit } x_0 \in \text{Int}(F) \text{ et } \varepsilon > 0 \text{ t.q.} \\ B(x_0, \varepsilon) \subset F$$

$$\text{Soit } y \neq x_0 \quad \text{notons } v = \frac{\varepsilon}{2\|y-x_0\|} (y-x_0)$$

$$\|v\| = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\|y-x_0\|} \|y-x_0\| = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{donc } \|v\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\text{Alors } v \in B(0, \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \text{mais } B(0, \varepsilon) &= B(x_0, \varepsilon) - x_0 \\ \Rightarrow B(x_0, \varepsilon) &= B(0, \varepsilon) + x_0 \end{aligned}$$

donc $v + x_0 \in \mathcal{B}(x_0, r) \subset F$

$$y - x_0 = \frac{2\|y - x_0\|}{r} v \in F \quad \text{car} \quad F \text{ est un s.e.v.}$$

$$y = (y - x_0) + (x_0) \in F \quad \text{d'où} \quad E \subset F \quad \text{et donc} \quad E = F$$

Exercice 5

$$E = \mathcal{R}[X] \quad P(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$$

1) Facile

2) Soit $P \in E$.

$$|P(P)| = |P(0)| \leq N_1(P)$$

$$\text{i.e. } \forall P \in E, \quad \underbrace{|P(P)|}_{|P(0)|} \leq N_1(P)$$

donc d'après la caractérisation des applications linéaires continues, γ est linéaire.

3) On pose $y = -Cx$, alors l'inégalité donne:

$$\left| e^{-Cx} - \sum_{n=0}^N \frac{(-Cx)^n}{n!} \right| \leq \frac{|Cx|^{N+1}}{(N+1)!} e^{|Cx|}$$

$$\forall x \in [1, 2] \quad |Cx|^{N+1} e^{|Cx|} \leq |2C|^{N+1} e^{|2C|}$$

car $x \mapsto |Cx|^{N+1} e^{|Cx|}$ croissante sur $[1, 2]$

D'où $\forall x \in [1, 2]$ et $C \geq 1$

$$\left| e^{-Cx} - \sum_{n=0}^N \frac{(-Cx)^n}{n!} \right| \leq \frac{|2C|^{N+1}}{(N+1)!} e^{2C}$$

4 a)

Soit $x \in [1, 2]$ et

$$c \mapsto e^{-cx}$$

$$e^{-cx} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$$

positive décroissante
d'où $\sup_{x \in [1, 2]} |e^{-cx}| = e^{-c}$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [1, 2]$ $\exists c > 0$ tq

$$\sup_{x \in [1, 2]} |e^{-cx}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

4 b)

Soit c tq $\sup_{x \in [1, 2]} |e^{-cx}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} \sup \left| \sum_{n=0}^N \frac{(-cx)^n}{n!} \right| &= \sup \left| \sum_{n=0}^N \frac{(-cx)^n}{n!} - e^{-cx} + e^{-cx} \right| \\ &\leq \sup \left| \sum_{n=0}^N \frac{(-cx)^n}{n!} - e^{-cx} \right| + \sup |e^{-cx}| \\ &\leq \frac{|2c|^{N+1}}{(N+1)!} e^{2c} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{|2c|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$,

$$\frac{|2c|^{N+1}}{(N+1)!} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Où e^{2c} est fixé donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \quad \frac{|2c|^{N+1}}{(N+1)!} e^{2c} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où $\sup_{x \in [1, 2]} \left| \sum_{n=0}^N \frac{(-cx)^n}{n!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Alors $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P(x)$ tq $N_2(P) \leq \varepsilon$

mais $\sum_{n=0}^N \frac{(0)^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ d'où $\underline{P(0) = 1}$

5] L'application φ est continue s'il existe $\alpha > 0$

tq $\forall P \in E$

$$|\varphi(P)| = |P(0)| \leq \alpha N_2(P)$$

Par contre, d'après 4 b) $\exists P \in E$ tq $P(0) = 1$ et $N_2(P) \leq \varepsilon$
pour tout $\varepsilon > 0$, donc en faisant ε tendre vers 0,
on trouve qu'il n'existe pas tel α fixé, d'où φ n'est pas continue.

Exercice 7

$$E = \{ u \in C^1([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0 \}$$

1] fonction nulle donne $0_E(0) = 0$ donc $0_E \in E$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad u, v \in E \Rightarrow u(0) = 0 \quad v(0) = 0$$

$$(\lambda u + v)(0) = \lambda \cdot u(0) + v(0) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Donc $\lambda u + v \in E$ d'où E est un espace vectoriel.

2] Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1 = \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)|$$

$$\bullet N_1(u) \geq 0$$

$$\bullet N_1(\lambda u) = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda u'(x)| = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)| = |\lambda| N_1(u)$$

$$\begin{aligned} \bullet N_1(u+v) &= \sup_{x \in [0,1]} |u'(x) + v'(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)| + |v'(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |v'(x)| \\ &= N_1(u) + N_1(v) \end{aligned}$$

$$\bullet N_1(u) = \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1], u'(x) = 0, \text{ donc } u \text{ est constante} \\ \text{or } u(0) = 0 \text{ car } u \in E, \text{ donc } u \text{ est une fonction nulle sur } E.$$

$$u, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$N_2(u) := \sup_{x \in [0,1]} |u'(x) + u(x)|$$

$$\bullet N_2(u) \geq 0$$

$$\bullet N_2(\lambda u) = |\lambda| N_2(u)$$

$$\bullet N_2(u+v) \leq N_2(u) + N_2(v)$$

$$\bullet N_2(u) = 0 = \sup_{x \in [0,1]} |u'(x) + u(x)| \Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad u'(x) + u(x) = 0$$

2

^

3) a) Soit $u \in E$.

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt$$

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(t) dt \right| \leq \int_0^x |u'(t)| dt \leq \int_0^x \sup_{z \in [0, t]} |u'(z)| dt \quad \text{or } x \in [0, 1]$$

$$\leq \int_0^1 \sup_{z \in [0, 1]} |u'(z)| dt$$

$$= \sup_{z \in [0, 1]} |u'(z)|$$

$$= N_1(u)$$

Donc $\forall u \in E \quad |u(x)| \leq N_1(u)$

3b) Soit $u \in E$

$$N_2(u) = \sup_{x \in [0, 1]} |u'(x) + u(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |u'(x)| + |u(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0, 1]} |u'(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |u(x)|$$

$$= N_1(u) \quad \quad \quad \leq N_1(u)$$

$$\leq N_1(u) + N_1(u) = 2N_1(u)$$

4) a)

$$F'(x) = -e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t)) e^t dt + e^{-x} (u(x) + u'(x)) e^x$$

$$= -F(x) + u(x) + u'(x) = u'(x)$$

$$F'(x) = -F(x) + u(x) + u'(x)$$

$$\Rightarrow F(x) + F'(x) = u(x) + u'(x)$$

$$\underbrace{F(0)}_{=0} + F'(0) = u'(0) \quad \text{car} \quad u \in E$$

Donc $F'(x) = u'(x)$

$$G(x) = F(x) - u(x)$$

$$G'(x) = F'(x) - u'(x) = (u + u' - F) - u' = u - F = -G(x)$$

$$\Rightarrow G(x) + G'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) = G(0) e^{-x}$$

$$G(0) = F(0) - u(0) = 0 \quad \text{donc} \quad G(x) = 0 \quad \forall x,$$

d'où $F(x) = u(x)$.

4b) $\forall t \in [0,1] \quad e^t > 0 \quad e' = e$
de plus e croissante, donc $\forall t, e^t \leq e$

$\forall t \in [0,1],$

$$|(u(t) + u'(t))e^t| = e^t |u(t) + u'(t)|$$

$$\leq e |u(t) + u'(t)|$$

$$\leq e \sup_{t \in [0,1]} |u(t) + u'(t)|$$

$$= e N_2(u)$$

4c) $2 \leq 2$

$$|u(x)| = e^{-x} \int_0^x (u(t) + u'(t)) e^t dt \leq e^{-x} \int_0^x |(u(t) + u'(t)) e^t| dt$$

$$\leq e^{-x} \int_0^x e N_2(u) dt$$

$$\leq e^0 \int_0^x e N_2(u) dt \quad \text{car } e^{-x} \text{ décroissante}$$

$$\leq \int_0^1 e N_2(u) dt$$

$$= e N_2(u)$$

Donc $|u(x)| \leq e N_2(u) \quad \forall x \in [0,1]$

4d)

$$u'(x) = u'(x) + u(x) - u(x)$$

$$\text{Soit } x \in [0,1] \quad |u'(x)| = |u'(x) + u(x) - u(x)|$$

$$\leq |u'(x) + u(x)| + |u(x)|$$

$$\leq N_2(u) + |u(x)|$$

$$\leq N_2(u) + e N_2(u) = (1+e) N_2(u)$$

Donc $N_1(u) \leq (1+e) N_2(u)$