



Exercice 1

Continuité

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, y \text{ tq } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$$d(u+x, u+y) = \|u+x - (u+y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

Alors en prenant $\delta = \varepsilon$ on obtient la continuité
Si $\lambda = 0$ évident. Supposons $\lambda \neq 0$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \|x - y\|$$

$$\text{donc si } |\lambda| \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

donc en prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ on obtient la continuité.

Exercice 2

$$f(x) = x$$

$$1) \quad f(0) = 0 \quad \text{donc} \quad f \in A \text{ d'où } d(f, A) = 0$$

$$2) \quad f(0) = 0 \quad \text{donc} \quad f(0) \geq 0 \text{ d'où } d(f, A) = 0$$

$$3) \quad \text{Soit une suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) = x - \frac{1}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ est continue donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in A$$

$$\text{et } f_n(0) = -\frac{1}{n+1} \text{ donc } < 0$$

$$\text{De plus } f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \text{car } -\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{donc } d(f, f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{d'où } d(f, A) = 0$$

soit $g \in A$

$$4) \quad d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |(f - g)(x)| \geq |f(0) - g(0)| = |0 - 1| = 1$$

$$\text{donc } \inf_{g \in A} \|f - g\|_\infty \geq 1$$

$$\text{soit } g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad g \in A$$

$$x \mapsto x+1$$

$$\|f - g\|_\infty = 1 \quad \text{donc} \quad d(f, A) = 1$$

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ e.v.n $A \subset E$
 $B \subset E$.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

1) Supposons que A est ouvert.

Donc $\forall a \in A, \exists r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$ où $B(a, r) = \{a' \in E \mid \|a - a'\| < r\}$

Soit $z \in A + B$ donc $\exists a \in A, b \in B$ tq $z = a + b$

Soit $r > 0$ tq $B(a, r) \subset A$

$$B(z - b, r) \subset A$$

$$= \{z' \in E \mid \underbrace{\|z' - (z - b)\|}_{\in A} < r\}$$

$$= \{z' \in E \mid \|z' - a\| < r\}$$
$$\leq \|z' - z\| + \|b\|$$

$$\text{donc } B(z - b, r) = \{z' \in E \mid \underbrace{\|z' - (z - b + b)\|}_{= \|z' - (z - b) - b\|} < r\}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in A}$$

$$\text{donc } z' - (z - b) - b \in A + B$$

et donc $A + B$ est ouvert.

Pour B ouvert le raisonnement est identique par la symétrie de l'énoncé.

2) Supposons que A et B sont compact donc
pour tout suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B

il existe une sous-suite $(a_{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$
 $(b_{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{tq } a_{p(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$$

$$b_{p(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$$

Soit une suite d'éléments de $A+B$ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \begin{matrix} a'_n, b'_n \\ \in A \quad \in B \end{matrix} \quad \text{t.q.} \quad z_n = a'_n + b'_n$$

$$\text{donc} \quad \exists \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \quad \text{t.q.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a_n + b_n$$

$$\text{Or } A \text{ compact} \quad \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$\text{Or } B \text{ compact} \quad \exists \phi: \varphi(\mathbb{N}) \rightarrow \varphi(\mathbb{N}) \quad \text{t.q.} \quad b_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$$

$$\text{D'où} \quad \exists \phi(\varphi(n)) = a_{\phi(\varphi(n))} + b_{\phi(\varphi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

donc $A+B$ compact.

exercice 4

$$(E, \|\cdot\|) \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

soit $x \in E$ et $r > 0$

$$B(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

$$\tilde{B}(x, r) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$$

donc $B(x, r) \subset \tilde{B}(x, r)$, de plus $B(x, r)$ fermé

$$\text{donc} \quad \text{Adh}(B(x, r)) \subset \tilde{B}(x, r)$$

Montrons que $\tilde{B}(x, r) \subset \text{Adh}(B(x, r))$

soit $z \in \tilde{B}(x, r)$ si $z \in B(x, r)$ évident,
donc supposons $z \in \tilde{B}(x, r) \setminus B(x, r)$

$$\text{i.e.} \quad \|z - x\| = r$$

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad q_n = (1 - \frac{1}{n+1})z + (\frac{1}{n+1})x$$

$$q_n - x = (1 - \frac{1}{n+1})z + \frac{1}{n+1}x - x$$

$$= (1 - \frac{1}{n+1})z + (\frac{1}{n+1} - 1)x$$

$$= (1 - \frac{1}{n+1})z - (1 - \frac{1}{n+1})x = (1 - \frac{1}{n+1})(z - x)$$

$$\|y_n - x\| = \|(1 - \frac{1}{n+1})z - x\| = |1 - \frac{1}{n+1}| \|z - x\| < \underbrace{\|z - x\|}_{=2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \quad \|y_n - x\| < 2 \quad \text{donc } y_n \in B(x, 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{de plus } 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{et } \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{donc } y_n = (1 - \frac{1}{n+1})z + \frac{1}{n+1}x \longrightarrow z$$

$$\text{donc } z \in \text{Adh}(B(x, 2))$$

$$\text{Donc } \tilde{B}(x, 2) \subset \text{Adh}(B(x, 2))$$

$$\text{et alors } \tilde{B}(x, 2) = \text{Adh}(B(x, 2))$$

exercice 5

$$E = C^1([0, 1], \mathbb{R}) \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

$$N(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$$

$$\underline{1)} \quad \text{Evidemment } N(f) \geq 0 \quad \forall f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$$

$$N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f'(x)|$$

$$= |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$$

$$= |\lambda| N(f)$$

$$N(f+g) = |f(0)+g(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)+g'(x)|$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |g'(x)|$$

$$= N(f) + N(g)$$

$$N(f) = 0 = |f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \Rightarrow |f(0)| = 0 \text{ et }$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0, 1] \quad |f'(x)| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\text{i.e. } f \text{ est constante, or } f(0) = 0 \text{ donc } \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 0 \text{ donc } f \text{ fonction nulle}$$

donc N est une norme

2)

Soit $f \in C'([0,1], \mathbb{R})$

donc le théorème des accroissements finis fournit

$$f(x) - f(0) = (x-0) f'(c)$$

$$\text{Donc } \forall x \in (0,1) \quad f(x) = f(0) + x f'(c)$$

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq |f(0)| + |x| \cdot \sup_{x \in (0,1)} f'(x)$$

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq |f(0)| + \sup_{x \in (0,1)} f'(x) = N(f)$$

$$\text{donc } \|f\|_{\infty} \leq N(f)$$

Exercice 7

$\mathbb{R}[X]$

$\mathbb{R}_2[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\|P\|_1 = \int_0^2 |P(x)| dx$$

Soit $Q \in \mathbb{R}[X], \lambda \in \mathbb{R}$

1) $\|P\|_1 \geq 0$ évidemment

$$\begin{aligned} \|\lambda P\|_1 &= \int_0^2 |\lambda P(x)| dx \\ &= \int_0^2 |\lambda| |P(x)| dx \\ &= |\lambda| \int_0^2 |P(x)| dx = |\lambda| \|P\|_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P+Q\|_1 &= \int_0^2 |P+Q| dx \\ &\leq \int_0^2 |P| + |Q| dx \quad \text{linéar. triang.} \\ &= \int_0^2 |P| dx + \int_0^2 |Q| dx \quad \text{lin. de l'int.} \\ &= \|P\|_1 + \|Q\|_1 \end{aligned}$$

$$\|P\|_1 = 0 \quad = \int_0^2 |P(x)| dx \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [0,2], \quad |P(x)| = 0 \\ \Rightarrow P(x) = 0$$

donc P admet une infinité de racines d'où P est un polynôme nul. Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

d'où $\|\cdot\|_1$ est une norme

2) $(P_n)_{n \geq 0}$ suite dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} X^j$$

Supposons que $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P$ i.e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tq} \quad \forall n \geq N, \quad \|P_n - P\|_1 < \varepsilon$$

$$\int_0^2 |P_n(X) - P(X)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \left| \sum_{j=0}^n a_{n,j} X^j - \sum_{j=0}^p a_j X^j \right| < \varepsilon$$

$$\int_0^2 \left| \sum_{j=0}^n (a_{n,j} - a_j) X^j - \sum_{j=k+1}^p a_j X^j \right| < \varepsilon$$

Exercice 8

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \subset \text{Adm}(\mathbb{Q})$$

1) $\ell_c(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$

Soit $x \in \ell^p(\mathbb{N})$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p = L$

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p = \sum_{n=0}^N |x_n|^p + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^p}_{< \varepsilon}$$

donc définissons $y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n = 0, \dots, N \\ 0 & \text{si } n \geq N+1 \end{cases}$

Alors $y \in \ell_c(\mathbb{N})$

$$\|x - y\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n - y_n| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

Donc $\forall x \in \ell^p(\mathbb{N})$ on peut trouver $y \in \ell_c(\mathbb{N})$

tq $\|x - y\| < \varepsilon$ donc $\ell_c(\mathbb{N})$ est bien dense dans $\ell^p(\mathbb{N})$

2) Supposons par l'absurde que $\ell_c(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$

$\forall \varepsilon > 0,$
donc $\forall x \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \quad \exists y \in \ell_c(\mathbb{N})$

tq $\|x - y\| < \varepsilon$

Soit $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ donc $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\|x\|_\infty \leq M$

notons $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = 1$

$\|x - y\|_\infty \geq 1$ donc $\ell_c(\mathbb{N})$ n'est pas dense dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$

3) Supposons que $p \leq q$

Soit $x \in \ell^p(\mathbb{N})$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$$

$$\text{donc } |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où } \|x_n\|_\infty < M$$

$$\text{Alors } |x_n|^q = |x_n|^p |x_n|^{q-p} \leq M^{q-p} |x_n|^p$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^q \leq M^{q-p} \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty$$

$$\text{donc } x \in \ell^q(\mathbb{N})$$

4) Notons
$$z_n = \begin{cases} N^{-\frac{1}{p}} & \text{si } 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{si } n \geq N+1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \|z_n\|_p = \sum_{n=0}^N N^{-\frac{1}{p}} = (N+1)N^{-\frac{1}{p}} = 1 + N^{-\frac{1}{p}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

$$\|z_n\|_q = \sum_{n=0}^N N^{-\frac{1}{q}} = (1 + \frac{1}{N}) N^{-\frac{1}{q}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{alors } z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f: \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^p(\mathbb{N})$$
$$x \longmapsto x$$

$$\text{mais } \underbrace{f(z_n)}_{z_n} \not\xrightarrow{} 0 = f(\lim z_n)$$

Donc f n'est pas continue.

Exercice 10

$\alpha \geq 0$

$$N_\alpha(P) = |P(\alpha)| + \int_0^1 |P'(x)| dx, \quad P \in \mathbb{R}[X]$$

1) $\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad N_\alpha(P) \geq 0$ car val. absolue.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} N_\alpha(\lambda P) &= |\lambda P(\alpha)| + \int_0^1 |\lambda P'(x)| dx \\ &= |\lambda| (|P(\alpha)| + \int_0^1 |P'(x)| dx) \\ &= |\lambda| N_\alpha(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\alpha(P + Q) &= |P(\alpha) + Q(\alpha)| + \int_0^1 |P'(x) + Q'(x)| dx \\ &\leq |P(\alpha)| + |Q(\alpha)| + \int_0^1 |P'(x)| dx + \int_0^1 |Q'(x)| dx \\ &= N_\alpha(P) + N_\alpha(Q) \end{aligned}$$

$$N_\alpha(P) = |P(\alpha)| + \int_0^1 |P'(x)| dx = 0$$

$$\Rightarrow |P(\alpha)| = 0 \Rightarrow P(\alpha) = 0$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 |P'(x)| dx = 0$$

$$\text{Or } \forall x \in [0, 1], |P'(x)| \geq 0, \quad P'(x) = 0$$

P' admet une infinité de racines, donc P' est un polynôme nul, d'où P est un polynôme constant donc P est un polynôme nul car P constante et $P(\alpha) = 0$.

Donc N_α est bien une norme.

2) Soit $a < b$ et $b > 1$

Supposons par l'absurde que N_a et N_b sont équivalentes

donc $\exists c_1, c_2 \quad \dagger$

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad c_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq c_2 N_a(P)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{donc } c_1 N_a(x^n) \leq N_b(x^n) \leq c_2 N_a(x^n)$$

$$\Leftrightarrow c_1 (|a^n| + \int_0^1 |x^n| dx) \leq |b^n| + \int_0^1 |x^n| dx \leq c_2 (|a^n| + \int_0^1 |x^n| dx)$$

$$\Leftrightarrow c_1 (|a^n| + 1) \leq |b^n| + 1 \leq c_2 (|a^n| + 1)$$

$$|b^n| + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{si } a \leq 1 \quad |a^n| + 1 \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{absurde}$$

supposons $a > 1$ et $a < b$

$$\text{donc } |b^n| + 1 \leq c_2 (|a^n| + 1)$$

$$\Rightarrow c_2 \geq \frac{|b^n| + 1}{|a^n| + 1} \quad \text{car } |a^n| \geq 0 \text{ et } |a^n| + 1 \geq 1$$

$$\sim \frac{|b^n|}{|a^n|} = \left| \left(\frac{b}{a} \right)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{car } b > a$$

$$\text{donc } c_2 \geq +\infty \quad \text{ce qui est absurde}$$

donc N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

3) Soit $a, b \in [0, 1]$

$$\text{Notons } g(p) = \sup_{x \in [0, 1]} |p'(x)|$$

$$N_a(p) = |p(a)| + \underbrace{\int_0^1 |p'(x)| dx}_{=: g} \leq g(p) + g$$

$$N_b(p) = |p(b)| + \underbrace{\int_0^1 |p'(x)| dx}_{=: g} \leq g(p) + g$$

$$|p(a)| = |p(b) + p(a) - p(b)| \leq |p(b)| + \int_a^b |p'(x)| dx \\ \leq |p(b)| + \int_0^1 |p'(x)| dx$$

$$N_a(p) = |p(a)| + \int_0^1 |p'(x)| dx \leq |p(b)| + 2 \int_0^1 |p'(x)| dx \\ \leq 2(|p(b)| + \int_0^1 |p'(x)| dx) \\ = 2 N_b(p)$$

Par symétrie $N_b(p) \leq 2N_a(p)$

D'où N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 11

$$\mathcal{L} = \{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists k > 0, \forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq k |x - y| \}$$

$f \in \mathcal{L}$

$$C(f) := \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R}^n \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$$N(f) = \|f\|_\infty + C(f)$$

1) N est évidemment positive
soit $f, g \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N(\lambda f) = |\lambda| \|f\|_\infty + \frac{|\lambda| |f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$$= |\lambda| (\|f\|_\infty + C(f))$$

$$N(f+g) = \|f+g\|_\infty + \frac{|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))|}{|x-y|}$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \frac{|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|}{|x-y|}$$

$$\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|}$$

$$= N(f) + N(g)$$

$$N(f) = 0 = \|f\|_\infty + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| = 0$$

car $\|f\|_\infty$ positive et $C(f)$ aussi

$$\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$$

Donc $N(\cdot)$ est bien une norme.

2) $\forall f \in \mathcal{L}$

$$\|f\|_{\infty} \leq N(f) \\ = \|f\|_{\infty} + C(f)$$

$$N(f) \leq C \|f\|_{\infty}$$

Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$

$$\|f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$
$$C(f_n) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ x \neq y}} \frac{|\sin(nx) - \sin(ny)|}{n|x-y|} = 1 \quad \text{car} \quad |f_n'(x)| \leq 1 \quad \forall x$$

D'où $N(f_n) = \|f_n\|_{\infty} + C(f_n) \longrightarrow 1$

$\nexists C \neq 0 \quad 1 \leq C \cdot 0$

donc N et $\|\cdot\|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes.

3) Soit f_n une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}, N)$

donc $N(f_n - f_m) = \|f_n - f_m\|_{\infty} + C(f_n - f_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$

$$\Rightarrow \|f_n - f_m\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

donc f_n est de Cauchy dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$
donc f_n possède une limite f

$$\text{et} \quad \|f_n - f\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

$$C(f_n - f) = \frac{|f_n(x) - f(x) - f_n(y) + f(y)|}{|x-y|}$$

$$|C(f_n) - C(f_m)| \leq C(f_n - f_m) \leq N(f_n - f_m) \longrightarrow 0$$

Donc $C(f_n)$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$ qui est complet donc possède une limite C .

on $f_n \in \mathcal{L}$

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} C(f_n) |x-y| = C|x-y|$$

donc $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ donc f est aussi Lipschitzienne.

$$N(f_n - f) = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + C(f_n - f)$$

$$C(f_n - f) \leq |C(f_n) - C(f)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où } N(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(\mathcal{L}, N)$ est complet.

Exercice 12

$$\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N}) = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \}$$

1) Toute suite convergente est bornée alors $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N}) \subset \mathcal{L}^0(\mathbb{N})$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$

Évidemment la suite nulle appartient à $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$

$$\text{donc } \begin{matrix} u_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & 0 \\ v_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & 0 \end{matrix}$$

$$\lambda u_n + v_n \longrightarrow \lambda 0 + 0 \quad \text{car} \quad \begin{matrix} u_n \rightarrow 0 \\ v_n \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\text{donc } (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$$

donc $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^0(\mathbb{N})$

2) Soit $(u_n^{(N)})$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$

qui converge vers une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{i.e. } \forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall N \geq N' \quad \|u_n^{(N)} - v_n\|_\infty \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall N \geq N' \quad \|u_n^{(N)} - v_n\|_\infty < \varepsilon$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n^{(N)} - v_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(N)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_n^{(N)} - v_n = 0$$

$$\text{ou } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_n^{(N)} = 0$$

$$\text{donc } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc la limite $v_n \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$ et $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N})$ est fermé.

