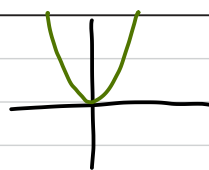




### Exercice 1



1)  $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

Notons  $C = \emptyset$  Evidemment  $C$  est ouvert  
et  $C \subset A$

donc  $C \subset \text{Int}(A)$

Soit  $X \in A$  notons  $X = (x, x^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Prenons  $X_n = (x_n, y_n) := (x, x^2 + \frac{1}{n}) \notin A$  mais

$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  donc  $X_n \in \text{Adh}(\mathbb{R}^2 \setminus A)$   
et  $X \in \text{Adh}(\mathbb{R}^2 \setminus A)$

Donc  $\text{Int}(A) = \emptyset$

Notons  $B = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

$A \subset B$ . De plus  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  est ouvert, donc  $B$  fermé  
Donc  $\text{Adh}(A) \subset B$

Montrons que  $B \subset \text{Adh}(A)$

Soit  $X \in B \setminus A$  ce qui est impossible car  $B \setminus A = \emptyset$

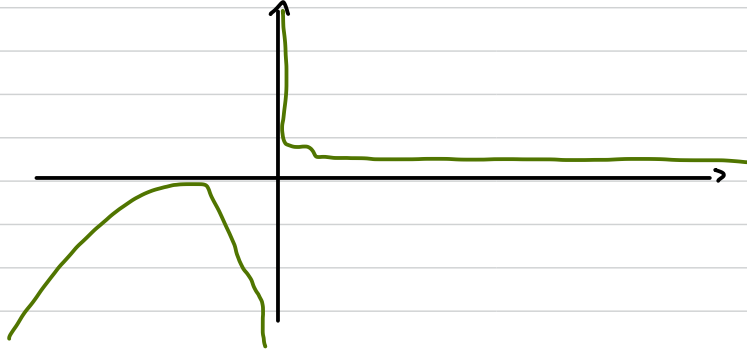
$\forall X \in C, \exists X_n$ , notons  $X_n = X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad X_n \in A, X \in C$

donc  $B \subset \text{Adh}(A)$

Donc  $B = \text{Adh}(A)$ .

2)

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$



$$\text{Notons } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$B \subset A \text{ et } B \text{ est ouvert, donc } B \subset \text{Int}(A)$$

Montrons que  $\text{Int}(A) \subset B$ .

$$\text{Soit } X \in A \setminus B \text{ i.e. } X = (x, y) \text{ tq } x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{Prenons } X_n = (x, (y^2 - \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}) \text{ donc } x_n^2 + y_n^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{n}$$

$$x_n^2 + y_n^2 = 1 - \frac{1}{n} \text{ donc } < 1. \quad X_n \notin A \text{ et } X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$$

$$\text{Donc } X \in \text{Adh}(\mathbb{R}^2 \setminus A), \text{ d'où } \text{Tout } X \notin B \notin \text{Int}(A)$$

$$\text{Donc } \text{Int}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$\text{Notons } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \text{ qui est ouvert, donc } C \text{ est fermé}$$

$$\text{Alors } A \subset C, \text{ donc } \text{Adh}(A) \subset C$$

Montrons que  $C \subset \text{Adh}(A)$ . Soit  $\forall X \in C \exists X_n \in A \text{ tq } X_n \longrightarrow X$ .  
 $\forall X \in C$  on peut prendre  $X_n = X$ . Donc  $X \in \text{Adh}(A)$   
" (x,y)

$$\text{Donc } \text{Adh}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

3)

$$A = \mathbb{Z}^2$$

Notons  $B = \emptyset$  Évidemment  $B$  est ouvert et inclu dans  $A$ .

$$\text{Donc } B \subset \text{Int}(A)$$

$$\text{Montrons } \text{Int}(A) \subset B$$

$$\text{Soit } X \in A \setminus B \text{ i.e. } X = (x, y) \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Soit } x_n = (x, y + \frac{1}{n+1}) \notin A \text{ car } \frac{1}{n+1} \notin \mathbb{Z}$$

$$\text{Mais } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \in A \setminus B.$$

$$\text{Ainsi } \forall X \in B \text{ mais } X \in A, \quad X \notin \text{Int}(A).$$

$$\text{Donc } \text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Prenons } B = \mathbb{Z}^2$$

$$C \subset B \text{ et } B \text{ est évidemment fermé}$$

$$\text{Donc } \text{Adh}(C) \subset B$$

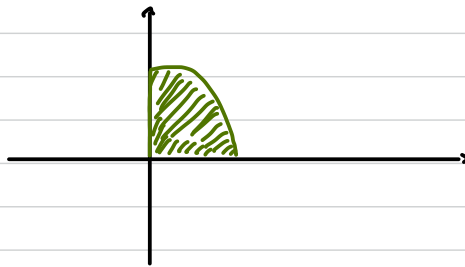
$$\forall X \in B, \text{ on prend } x_n = X \text{ donc } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$$

donc  $\forall X \in B, \quad X \in \text{Adh}(A).$

$$\text{Donc } B \subset \text{Adh}(A)$$

$$\text{En conséquence } \text{Adh}(A) = \mathbb{Z}^2$$

4)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$



Notons  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$

$B$  est ouvert et inclu dans  $A$

Donc  $B \subset \text{Int}(A)$ .

Montrons que  $\text{Int}(A) \subset B$

Soit  $X \in A \setminus B$  i.e  $X = (x, y)$  avec  $x = 0, y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1$  (i)  
 ou  $x \geq 0, y = 0, x^2 + y^2 \leq 1$  (ii)  
 ou  $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$  (iii)

Supposons cas (i)

Soit  $X_n = (x - \frac{1}{n}, y)$  donc  $x < 0$  donc  $X_n \notin A$   
 mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$  donc  $X \in \text{Adh}(E \setminus A)$

Supposons cas (ii)

Soit  $X_n = (x, y - \frac{1}{n}) \notin A$  mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$   
 Donc  $X \in \text{Adh}(E \setminus A)$

Supposons cas (iii)

Soit  $X_n = (x + \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \notin A$  mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$   
 donc  $X \in \text{Adh}(E \setminus A)$

Donc  $\forall X \in A \setminus B, X \in \text{Adh}(E \setminus A)$ , donc  $X \notin \text{Int}(A)$ .

Donc  $\text{Int}(A) = B$ .

Notons  $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Donc  $B$  est fermé et  $A \subset B$ .

Donc  $\text{Adh}(A) \subset B$ .  
Alors  $B \subset \text{Adh}(A)$ .

Soit  $X \in B \setminus A$  i.e.  $X = (x, y)$  avec  $x = 0, y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1$  (i)  
ou  $x \geq 0, y = 0, x^2 + y^2 \leq 1$  (ii)  
ou  $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$  (iii)

Supposons cas (i)  
prenons  $X_n = (x + \frac{1}{n}, y) \in A$  et  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$

Donc  $X \in \text{Adh}(A)$

Supposons cas (ii)  
prenons  $X_n = (x, y + \frac{1}{n}) \in A$  et  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$

donc  $X \in \text{Adh}(A)$

Supposons cas (iii)  
prenons  $X_n = (x - \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}) \in A$  et  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$

Donc  $X \in \text{Adh}(A)$ .

Donc  $\forall X \in B, X \in \text{Adh}(A)$  donc  $B \subset \text{Adh}(A)$

Donc  $\text{Adh}(A) = B$

$$5] \quad A = \{(x, x \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}$$

Posons  $B = \emptyset$  qui est ouvert et évidemment inclus dans  $A$ .

$$\text{Donc } B \subset \text{Int}(A)$$

$$\text{M}_y \quad \text{Int}(A) \subset B$$

$$\text{Soit } x \in A \setminus B \quad \text{i.e. } x \in A \\ (x, x \sin(\frac{1}{x}))$$

$$\text{Soit } x_n = (x, x \sin(\frac{1}{x}) + \frac{1}{n}) \notin A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Mais } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in A \setminus B.$$

$$\text{Donc } \forall x \notin B, x \notin \text{Int}(A).$$

$$\text{Donc } \forall x \in \text{Int}(A), x \in B$$

$$\text{D'où } \text{Int}(A) \subset B.$$

$$\text{Donc } \text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3 3!} + \frac{1}{x^5 5!}$$

$$x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\text{donc on peut prolonger } x \sin \frac{1}{x} = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Prenons } B = A \cup \{(0,0)\}$$

$$E \setminus B \text{ est ouvert, donc } B \text{ est fermé et } A \subset B \\ \text{donc } \text{Adh}(A) \subset B$$

Montrons que  $B \subset \text{Adh}(A)$ .

Soit  $X \in B$ . On a deux possibilités:

1)  $X \in A$ , On prend  $X_n = X$  et tout est fait.  
2)  $X = (0,0)$  On prend  $X_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n})$   $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$

Donc  $\forall x \in B, x \in \text{Adh}(A)$

Donc  $B \subset \text{Adh}(A)$

D'où  $\text{Adh}(A) = A \cup \{(0,0)\}$

$$|x - x'| < 2$$

$$x - x' < 2 \Rightarrow x' > x - 2$$

$$-x + x' < 2 \quad x' < x + 2$$

$$2 < 1 - x \quad 2 < 1 - x$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow 2 < x$$

## exercice 2

$$\underline{1)} \quad A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$$

$$\text{Soit } B = \emptyset$$

$$\text{Si } w \in A \setminus B \quad \text{i.e.} \quad \text{si } x \in A.$$

$w = (x, 0)$

$$\text{On prend } x_n = (x, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in A$$

$$\text{Donc } w \in \text{Adh}(A^c) \quad \text{donc } w \notin \text{Int}(A).$$

$$\text{Donc } \text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Soit } B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\text{B est fermé et } A \subset B \quad \text{donc } \text{Adh}(A) \subset B$$

$$\text{Soit } w = (x, 0) \in B.$$

$$\text{prenons } w_n = \begin{cases} (x + \frac{1}{n}, 0) & \text{si } x \neq 1 \\ (x - \frac{1}{n}, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \in B$$

$$\text{Donc } w \in \text{Adh}(A)$$

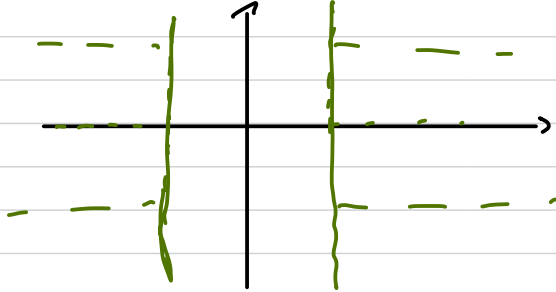
$$\text{Donc } B \subset \text{Adh}(A)$$

$$\text{D'où } \text{Adh}(A) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \text{Adh}(A)$$

2]

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1, |y| < 1 \}$$



$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1, |y| < 1 \}$$

$$x_0 > 1$$

$$y_0 > -1$$

$$\begin{cases} x_0 - \varepsilon > 1 \\ y_0 - \varepsilon > -1 \end{cases}$$

$$y_0 < 1$$

$$\begin{cases} x_0 + \varepsilon > 1 \\ y_0 + \varepsilon < 1 \end{cases}$$

$$x_0 < -1$$

$$y_0 > -1$$

$$\begin{cases} x_0 + \varepsilon < -1 \\ y_0 - \varepsilon > -1 \end{cases}$$

$$y_0 < 1$$

$$\begin{cases} x_0 + \varepsilon < -1 \\ y_0 + \varepsilon < 1 \end{cases}$$

Donc  $\exists$  tel  $\varepsilon$  tel  $B(x_0, y_0, \varepsilon) \subset B$

Donc  $B$  est ouvert et  $B \subset A$  donc  $B \subset \text{Int}(A)$

Soit  $w \in \partial A$  i.e  $w = (x, y)$  avec  $x = 1$  ou  $x = -1$  et  $|y| < 1$

$$w_n = \begin{cases} (x + \frac{1}{n}, y) & \text{si } x = -1 \\ (x - \frac{1}{n}, y) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Mais  $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \in A$  donc  $w \in \text{Adh}(A^c) \cap \text{Int}(A)$   
Donc  $\text{Int}(A) = B$

Notons  $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1, |y| \leq 1\}$

### Exercice 6

$$A+B = \{x+y : x \in A, y \in B\}$$

1. Supposons que  $A$  ou  $B$  est ouvert, par la symétrie de problème, on peut supposer  $A$  ouvert.

$$\text{Donc } \forall a \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{t.q. } B(a, \varepsilon) \subset A$$

$$\text{Soit } z \in A+B \quad \text{donc } z = \underset{\in A}{x} + \underset{\in B}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } z' \in B(z, \varepsilon) \quad \text{Alors } z' &= z + z' - z \\ &= x + z' - z + y \\ &= x' + y \quad \text{où } x' = x + z' - z \Rightarrow x' - x = z' - z \end{aligned}$$

$$d(x, x') = \|x - x'\| = \|z - z'\| = d(z, z')$$

$$\begin{aligned} \text{On a } z' \in B(z, \varepsilon) \quad \text{donc } d(z, z') &< \varepsilon \\ \text{et on a } d(x, x') &= d(z, z') \quad \text{donc } d(x, x') < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{donc } x' \in A$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } z' &= x' + y \quad \text{donc } z' \in A+B \\ \text{ainsi } B(z, \varepsilon) &\subset A+B \quad \text{et donc} \\ A+B &\text{ est ouvert.} \end{aligned}$$

2]

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

$$B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$\{0\}$  est fermé car fini,  $\mathbb{R}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$

Or  $\alpha$  une distance usuelle, donc  $\{0\} \times \mathbb{R}$  est aussi fermé, donc  $B$  est fermé.

Soit une fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui est continue  
 $(x, y) \mapsto xy$

car polynomiale. On voit bien que  $A = f^{-1}(\{1\})$

$\{1\}$  est fermé car fini. Donc  $A$  est fermé car une image réciproque d'un fermé par une application continue.

3]

Soit  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A+B$  i.e.  $u_n = a_n + b_n$  où  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$   
 et  $b_n \in B$

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \quad \text{avec} \quad a_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right), b_n = (0, -1)$$

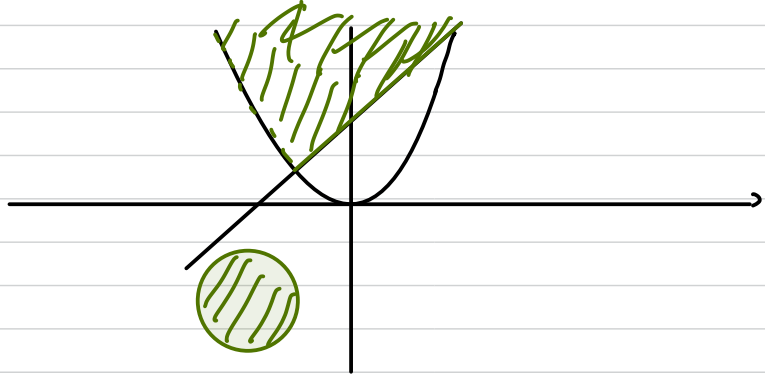
$u_n \longrightarrow (0, 0) \notin A+B$  car  $(x, y)$   $x$  est toujours 0 dans  $B$  et n'est jamais 0 dans  $A$ , alors  $x$  ne peut pas être zéro dans  $A+B$

### Exercices

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x+1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 \leq 0\}$$



Soit  $z \in A \cap B$  et  $z > 0$   
“(x, y)”

Donc  $B(z, z) \cap A \cap B \neq \emptyset$

On a  $y > x^2$  et  $y \geq x+1$

Soit  $z' = (0, y+2z)$ , donc  $z' \in A \cap B$

$$y > x^2 \Rightarrow y + 2z > x^2 \quad \text{car } z > 0$$

$$y \geq x+1 \Rightarrow y + 2z \geq x+1 \quad \text{car } z > 0$$

$$d(z, z') = \sqrt{(x-0)^2 + (y - (y+2z))^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4z^2} > 2 \quad \text{donc } z' \notin B(z, z)$$

Donc  $(A \cap B) \cup C$  n'est pas bornée et alors  
n'est pas compact.

2) Conjecture:

$$\text{Soit } A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

$$\text{Adh}((A \cap B) \cup C) = (A' \cap B) \cup C$$

$$A' = f_1^{-1}([0, +\infty[) \quad \text{où } f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto y - x^2$$

Or  $f_1^{-1}$  est  $C^0$  car  
polynomiale et  $[0, +\infty[$  fermé, donc

$A'$  est fermé

$$\text{Soit } f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^0 \text{ car polynomiale.}$$
$$(x, y) \mapsto y - x$$

$B = f_2^{-1}([1, +\infty[)$  fermé car image réciproque d'un fermé  
par application continue.

$$\text{Soit } f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue car polynomiale.}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 4x + 4y$$

On voit que  $C = f_3^{-1}([-1, +\infty[)$   
donc fermé car image réciproque d'un fermé par  
une application continue.

Or  $A, B, C$  sont fermés, donc  $(A' \cap B) \cup C$  est fermé.  
De plus  $A \subset A'$ , donc  $(A \cap B) \cup C \subset (A' \cap B) \cup C$

$$\text{Donc } \text{Adh}((A \cap B) \cup C) \subset (A' \cap B) \cup C$$

$$\text{Soit } X \in (A' \cap B) \cup C$$

si  $X \in C$ , on peut prendre  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$   
donc  $X \in (A \cap B) \cup C$

$$\text{Donc } X \in \text{Adh}((A \cap B) \cup C)$$

sinon  $X \in A' \cap B$

si  $X \in A \cap B$ , évidemment  $X \in \text{Adh}((A \cap B) \cup C)$

sinon  $X \in (A' \cap B) \setminus (A \cap B)$

i.e.  $X = (x, y) \neq \emptyset$   $y \geq x+1$  et  $y = x^2$

prenons  $X_n = (\underbrace{x}_{x_n}, \underbrace{y + \frac{1}{n}}_{y_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$y_n > x_n^2$  car  $y = x^2 \Rightarrow y + \frac{1}{n} > x^2$

et  $y_n \geq x_n + 1$  car  $y \geq x + 1 \Rightarrow y + \frac{1}{n} \geq x + 1$

donc  $X_n \in A \cap B$

On voit que  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$  donc

$X \in \text{Adh}((A \cap B) \cup C)$  donc  $\forall X \in (A' \cap B) \cup C$   
 $X \in \text{Adh}((A \cap B) \cup C)$

Alors  $(A' \cap B) \cup C \subset \text{Adh}((A \cap B) \cup C)$

Par conséquent  $\text{Adh}((A \cap B) \cup C) = (A' \cap B) \cup C$

Conjecture:

$$B' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x + 1\}$$

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 < 0\}$$

$$\text{Int}(\underbrace{(A \cap B) \cup C}_D) = (A \cap B') \cup C' =: J$$

$A$  est ouvert (déjà montré)

$B' = f_2^{-1}([1, +\infty[)$  ouvert car image réciproque d'ouvert par une application continue.

$C' = f_3^{-1}]\!-\infty, -2[)$  ouvert car image réciproque d'ouvert par une application continue.

De plus  $B' \subset B$  donc  $(A \cap B' \cup C' \subset \mathcal{D})$   
 $C' \subset C$

donc  $\mathcal{Y} \subset \text{Int}(\mathcal{D})$

Montrons que  $\text{Int}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{Y}$

Soit  $X \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{Y}$   
 $"(x, y)$

deux cas possibles:

1.  $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 7 = 0$

2.  $y > x^2$  et  $y = x + 1$

Pour 1] Prenons  $X_n = (x, y + \frac{1}{n})$

Donc on a  $x^2 + (y + \frac{1}{n})^2 + 4x + 4y + \frac{4}{n} + 7 > 0$   
car  $(y + \frac{1}{n})^2 > y^2$  et  $4y + \frac{4}{n} > 4y$

Donc  $X_n \notin \mathcal{D}$ , mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$  car  
 $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
Donc  $X \in \text{Adh}(\mathcal{D})$  i.e  $X \notin \text{Int}(\mathcal{D})$

Pour 2] Prenons  $X_n = (x, y - \frac{1}{n})$  avec  $n \in \mathbb{N}$   
on a  $y - \frac{1}{n} < x + 1$  car  $y = x + 1$   
d'où  $X_n \notin \mathcal{D}$   
par contre,  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ , donc

$X \in \text{Adh}(\mathcal{D})$  i.e  $X \notin \text{Int}(\mathcal{D})$

Donc tout  $X \in \mathcal{Y}$ ,  $X \notin \text{Int}(\mathcal{D})$ , donc  $\text{Int}(\mathcal{D}) = \mathcal{Y}$ .