



Exercice 1

distance:

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

① Soit $x, y \in E$
 $d(x, y) \geq 0$ par définition
 $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ par définition.

$$\text{si } x = y: \quad d(x, y) = 0 = d(y, x)$$

$$\text{si } x \neq y: \quad d(x, y) = 1 = d(y, x)$$

donc d est métrique

$$\text{Si } x = y: \quad d(x, y) = 0 \leq \underbrace{d(x, z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(z, y)}_{\geq 0}$$

Si $x \neq y$:

trois sous cas

$$x = z \text{ et } z \neq y$$

$$d(x, y) = 1 \leq \underbrace{d(x, z)}_{=0} + \underbrace{d(z, y)}_{=1}$$

$$x \neq z \text{ et } z = y:$$

$$d(x, y) = 1 \leq \underbrace{d(x, z)}_{=1} + \underbrace{d(z, y)}_{=0}$$

$$x \neq z \text{ et } z \neq y$$

$$d(x, y) = 1 \leq \underbrace{d(x, z)}_{=1} + \underbrace{d(z, y)}_{=1} = 2$$

Donc d est bien une distance.

$$\begin{aligned}
 B(x, 0) & \text{ impossible} \\
 B(x, 1) &= \{ y : d(x, y) < 1 \} \\
 &= \{ y : d(x, y) = 0 \} \\
 &= \{ y : x = y \} = \{x\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1(x, 0) &= B(x, 1) = \{x\} \\
 B_1(x, 1) &= \{ y : d(x, y) \leq 1 \} = E \quad \text{car distance toujours} \leq 1
 \end{aligned}$$

2] Ouvert, si $\forall x \in F, \exists \epsilon > 0 \quad \forall y \quad B(x, \epsilon) \subset F$

$$\{x\} \quad B(x, 1) = \{x\} \subset \{x\}$$

Donc tout singleton est ouvert.

3] tous les sous ensembles de E sauf $\emptyset$

Exercice 2

$$\delta(x, y) = \min(1, d(x, y))$$

1] Montrons que δ est une distance.

$$1] \quad \delta(x, y) = \delta(y, x)$$

$$2] \quad \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$$

$$3] \quad \delta(x, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\forall \delta(x, y) = \min(1, d(x, y)) = \min(1, d(y, x)) = \delta(y, x) \quad \text{car } d \text{ distance}$$

$$2] \quad \delta(x, y) = \min(1, d(x, y))$$

$$\begin{aligned}
 \delta(x, z) + \delta(z, y) &= \min(1, d(x, z)) + \min(1, d(z, y)) \\
 &= \begin{cases} 1 + d(x, z) \leq 2 & \text{mais} \geq 1 \\ 1 + d(y, z) \leq 2 & \text{mais} \geq 1 \\ d(x, z) + d(y, z) \geq d(x, y) \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{si } d(x, y) < 1 &\Rightarrow \delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) \quad \text{toujours} \\
 \text{si } d(x, y) \geq 1 &\Rightarrow 1 \leq \delta(x, z) + \delta(z, y) \quad \text{toujours.}
 \end{aligned}$$

3

3) $\delta(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$ car d une distance

$$\delta(x, y) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Donc δ est une distance bien définie.
sur $X \times X$.

Donc (X, δ) est bien un espace métrique.

②

a) $\Rightarrow$ Supposons que u_n converge pour d
i.e. $\exists l \in X$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon$

$$\text{si } d(u_n, l) \geq 1$$

$$\text{donc } \delta(u_n, l) = 1 \leq d(u_n, l) < \varepsilon$$

$$\text{si } d(u_n, l) < 1$$

$$\text{donc } d(u_n, l) = \delta(u_n, l) < \varepsilon$$

Donc u_n converge pour δ

$\Leftarrow$ Supposons que u_n converge pour δ

i.e. $\exists l \in X$ tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \delta(u_n, l) < \varepsilon$

$$d(u_n, l) < \delta(u_n, l) \quad \text{si } \delta(u_n, l) < 1$$

$$\delta(u_n, l) \leq d(u_n, l) \geq 1 \quad \text{si } \delta(u_n, l) = 1$$

"

comme on peut trouver pour $\varepsilon < 1$,
on peut trouver pour ε' tq $\varepsilon < \varepsilon'$

Donc u_n cv. pour $d \Leftrightarrow u_n$ cv pour δ

3) évident

Exercice 3

1] $U_n = (x_n, y_n)$

$$\|U_n\| = \|U_n \cdot U_n\|^{\frac{1}{2}} = \|x_n^2 + y_n^2\|^{\frac{1}{2}}$$

$\exists l \in \mathbb{R}_+^2$ tq $\forall n \quad |U_n| \leq l$, donc $|U_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (+\infty, +\infty)$

$$\Rightarrow |x_n| \rightarrow +\infty \quad \Rightarrow \quad \|U_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$
$$|y_n| \rightarrow +\infty$$

2] $U_n = (x_n, y_n)$ Supposons que $(x_n^2 + y_n^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\Rightarrow x_n^2 + y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cas 1 $\exists l \in \mathbb{R}_+^2$ tq $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Donc $l^2 + y_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow y_n^2 \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow |y_n| \rightarrow +\infty$

Cas 2 par symétrie, $|x_n| \rightarrow +\infty$
si $|y_n| \rightarrow l$

Cas 3 $|x_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 $|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

3] Soit $E = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1]$

Pour $x=1$, $\exists z>0$ tq $B(1, z) \in A$
Donc A n'est pas ouvert.

Par contre $E \setminus A =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

Pour $x=0$ $\exists z>0$ tq $B(0, z) \in E \setminus A$
Donc $E \setminus A$ n'est pas ouvert, donc
 A n'est pas fermé.

4) Soit (E, d)

$$A := E \quad E \subseteq E$$

Est ouvert.

$E|E = \emptyset$ qui est ouvert,

long E est fermé.

Donc Est ouvert et fermé.

5] Soit $A \subset \mathbb{R}$. Supposons A est ouvert.

i.e. $\forall x \in A, \exists z > 0, B(x, z) \subset A$
 $\Rightarrow B(x, \frac{z}{2}) \subset B(x, z) \subset A$
 $= [x - \frac{z}{2}, x + \frac{z}{2}]$
 $\quad \quad \quad \alpha \quad \quad \beta$

Esercizio 4

1) prenons $A =]2, 3[$ et $X = \mathbb{R}$, d distance euclidienne.
 $B =]1, 4[$

On a bien ACB , par contre

$$\partial A = \{2, 3\}$$

$$\partial B = \{1, 4\} \quad \text{et} \quad \partial B \not\subset \partial A$$

donc faux

2) prenons $X = \mathbb{R}$, $A =]1, 2[$ $B =]2, 3[$

$A \cap B = \emptyset$ mais $\downarrow A = \{1, 2\}$
 $\downarrow B = \{2, 3\}$

e1 $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$

donc faux.

$$3) \quad A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$$

$$\partial B =$$

$$A \subset B \Rightarrow A \subset \text{Adh}(B)$$

$$\text{On a} \quad \begin{aligned} \text{Adh}(A) &= A \cup \partial A \\ \text{Adh}(B) &= B \cup \partial B \end{aligned}$$

$$\text{Soit } x \in \partial B \text{ donc } x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$\text{Supposons que } x \in \text{Int}(A) \text{ i.e. } \exists \alpha > 0 \text{ tq } B(x, \alpha) \subset A, \text{ comme } A \subset B, \text{ donc } B(x, \alpha) \subset B \Rightarrow$$

$$x \in \text{Int}(B) \text{ ce qui contredit avec la définition de la frontière.}$$

$$\text{Donc } x \notin \text{Int}(A) \text{ donc } x \in \partial A.$$

$$\text{Donc } \partial B \subset \partial A$$

4) faux prenons

$$A = [0, 1] \text{ et } B = [1, 2]$$

$$d(A, B) = 0$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\text{Mais } \partial A \cap \partial B = \{1\}$$

$$a_n \rightarrow x$$

$$b_n \rightarrow x$$

5 mars TD

10 mars CC

Exercice 5

Avec d discret le seul ensemble ouvert possible est l'ensemble d'un élément.

$$\{x\}$$

Supposons F fini

Alors le seul recouvrement possible est $\bigcup_{x \in F} \{x\}$ comme F est fini, ce

recouvrement couvre F , donc F est compact.

Supposons F compact. Alors pour tout recouvrement des ouvert de F admet un recouvrement fini.

$\bigcup_{x \in F} \{x\}$ couvre F . comme on a supposé

que F est compact, donc $\bigcup_{x \in F} \{x\}$ un nombre

fini des ouverts i.e. de $\{x\}$ qui couvre F .

C'est possible seulement si F est fini.

Donc F fini.

Exercice 6

(E_1, d_1) , (E_2, d_2) c.m. f continue.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in E_1$ tq $d(x_0, x) < \delta \Rightarrow d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$

F fermé $\Rightarrow F^c$ ouvert

donc $\forall x \in F^c \exists \alpha$ tq $B(x, \alpha) \subset F^c \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tq $B(f(x_0), \varepsilon) \subset f(F)^c$

$\Rightarrow \forall y \in f(F)^c \exists x_0 \in F^c, \exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in F^c B(x_0, \alpha) \subset F^c \Rightarrow B(y, \varepsilon) \subset f(F)^c$

Donc F fermé $\Rightarrow f(F)$ fermé

exercice 6

1) Soit E , compact et $F \subset E$, fermé.

Donc F est aussi compact.

$f(F)$ est aussi compact car f continue.

Tout compact est fermé, donc $f(F)$ est fermé.

2) Non.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \arctan(x)$

$\mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ mais pas compact car pas complet.

$f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ qui n'est pas fermé.

exercice 7

1) (X, d) un espace métrique
 $K_n \neq \emptyset$

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n$$

Soit $x_n \in K_1$ comme $K_2 \neq \emptyset$ et $K_2 \supset K_1$

alors x_n peut appartenir à K_2 et ne pas appartenir. Supposons donc $x_n \in K_2$.

On procède de même avec $K_2 \supset K_3 \neq \emptyset$ et

supposons donc $x_n \in K_3$. On voit bien le procédé de récurrence que si $x_n \in K_{n-1}$, donc x_n peut appartenir à K_n .

Donc $\exists x_n \in K_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Donc $\exists x_n$ qui appartient à tous les K_n , donc $x_n \in \bigcap_{n \geq 1} K_n$, donc K est non-vide.

2) K_1 compact, K_2 l'est aussi, donc K_2 est fermé.

D'après le cours $\underbrace{K_1 \cap K_2}_{=K_2}$ est compact.

On procède de même avec K_2 et K_3 , d'où $\underbrace{K_2 \cap K_3}_{=K_3}$ est compact. On voit le procédé

de récurrence où K_{n-1} compact et K_n compact $\Rightarrow$ fermé
donc $K_{n-1} \cap K_n$ compact.

Donc $\bigcap_{n \geq 1} K_n$ est compact par récurrence.

3) D'après 2) K est compact, donc
 K est fermé et borné.

Cas où U n'est pas borné est évident, donc
supposons que U est borné.

Donc $\exists x \in X$ et $\alpha > 0$ tq $U \subset B(x, \alpha)$

Supposons par l'absurde que $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $K_n \not\subset U$

i.e $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x \in K_n$ et $x \notin U$

Comme $K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K$.

$\exists x \in K$ et $x \notin U$ ce qui contredit avec l'hypothèse
que $K \subset U$.

Donc $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $K_n \subset U$.

Exercice 8

$$d_1 \sim d_2 \iff \exists 0 < a \leq b \text{ tq } \forall x, y \in X \quad a d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b d_1(x, y)$$

$$1) \quad d \sim d \quad \text{on choisit } a = b = 1 \quad \text{et} \quad d(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, y) \\ \iff d(x, y) = d(x, y)$$

fini!

$$2) \quad d_1 \sim d_2 \Rightarrow \\ a d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b d_1(x, y)$$

$$\Rightarrow d_1(x, y) \leq \frac{1}{a} d_2(x, y) \leq \frac{b}{a} d_1(x, y)$$

$$\frac{a}{b} d_1 \leq b d_2(x, y)$$

$$d_1 \leq \frac{b^2}{a} d_2$$

$$\frac{1}{b} d_2 \leq d_1$$

$$\text{Donc } \frac{1}{b} d_2 \leq d_1 \leq \frac{b^2}{a} d_2 \quad \text{donc } d_2 \sim d_1 \quad \underline{\text{fini}}$$

$$3) \quad d_1 \sim d_2$$

$$\Rightarrow$$

$$a d_1 \leq d_2 \leq b d_1$$

$$d_2 \sim d_3 \Rightarrow q d_2 \leq d_3 \leq v d_2$$

$$a q d_1 \leq q d_2 \leq d_3$$

$$d_3 \leq v d_2 \leq v b d_1$$

$$\Rightarrow a q d_1 \leq d_3 \leq v b d_1$$

$$\text{donc } d_1 \sim d_3$$

