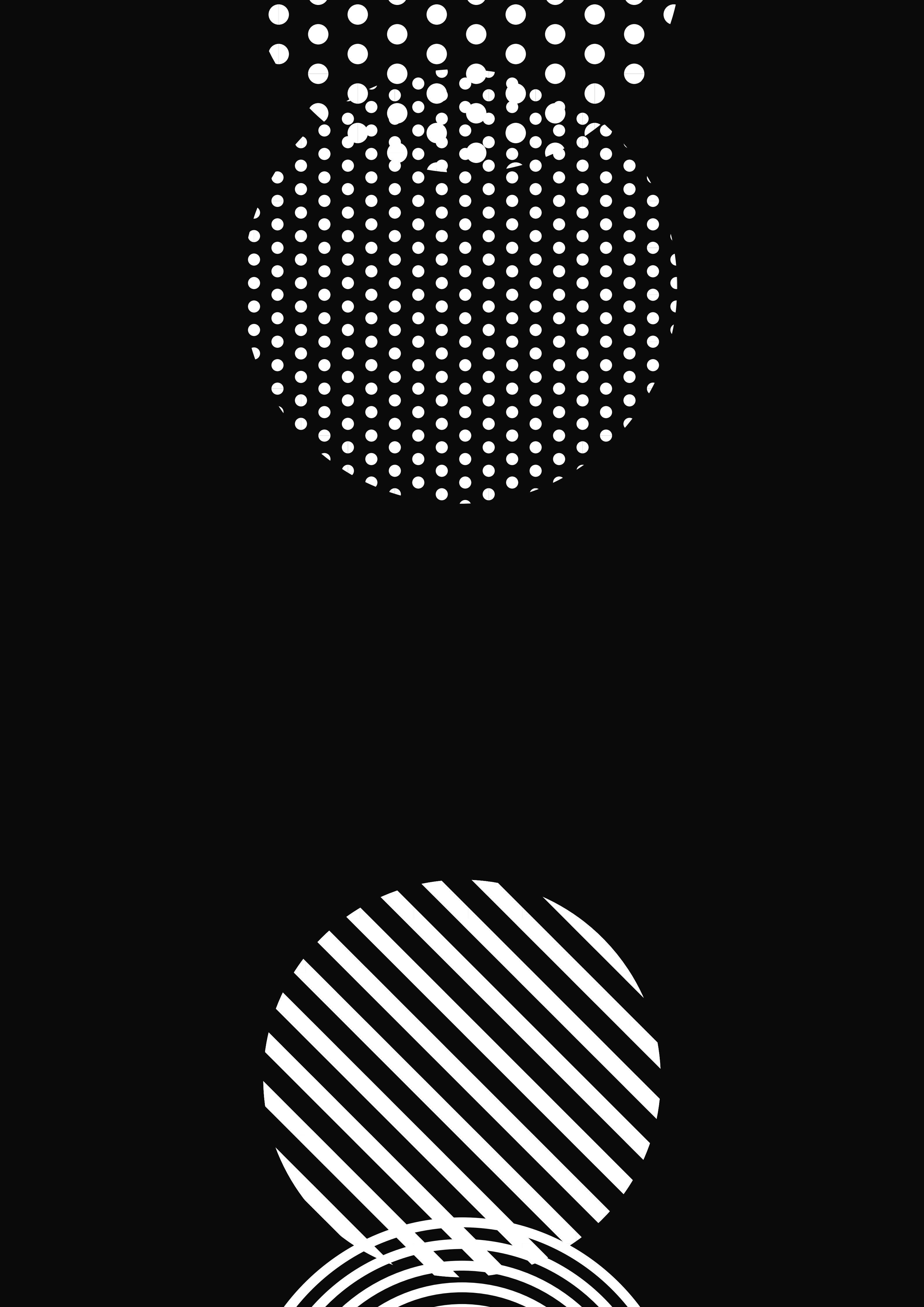


Exercice 1

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$

$\vec{\nabla} f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 = 3y \\ 3y^2 = 3x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \iff (x^2)^2 = x \implies x^4 = x \iff y^4 = y$

$\iff \begin{cases} x^4 = x \\ y^4 = y \end{cases}$

$\implies (x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (1,1)$

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\cdot) = (-\lambda)(-\lambda) - 9 = \lambda^2 = 9 \implies \lambda = 3$ ou $\lambda = -3$

Donc $(0,0)$ est un point selle.

$$\mathcal{H}_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det(\cdot) = (6-\lambda)(6-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 9$

Donc les valeurs propre de la matrice Hessienne sont toutes positives, donc $(1,1)$ est un minimum locale.

Exercice 2

$$f(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^3$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + 3(x^2 - 2xy + y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y - 3(x^2 - 2xy + y^2)$

$$\begin{pmatrix} 2 + 6x - 6y & 2 - 6x + 6y \\ 2 - 6x + 6y & 2 + 6x - 6y \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla} f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 2y + 3(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \\ 2x + 2y - 3(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -y \\ 3(x^2 - 2xy + y^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ 3y^2 + 6y^2 + 3y^2 = 0 \end{cases}$

$3x^2 + 6x^2 + 3x^2 = 0$

$y = 0 \implies x = 0$

Donc $(0,0)$ est le seul point critique de f

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6x-6y & 2-6x+6y \\ 2-6x+6y & 2+6x-6y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathcal{H}_f(0,0)}(\lambda) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 = 4\lambda \quad \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 4$$

Or il y a une valeur propre 0, donc $(0,0)$ est un point critique dégénéré.

Analyse complémentaire posons $u = x+y$ et $v = x-y$
On obtient $f(x,y) = f(u,v) = u^2 + v^3$ si on pose $u=0$
On obtient $f(x,y) = v^3$ donc si $v<0$ $f(0,v)$ est négatif et pour $v>0$ $f(0,v)$ est positif, donc $(0,0)$ est un point selle.

Exercice 3

Soit $f(x,y) = \begin{cases} x^{-1}y^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto f(t\vec{v}) = f(tv_1, tv_2)$

Si $v_1 = 0$ $g(t) = 0$ g est dérivable.

Si $v_1 \neq 0$ $g(t) = t \underbrace{\frac{v_2^2}{v_1}}_{\text{constante}}$ donc g est dérivable

Alors g est dérivable dans toutes les direction.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \neq 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$

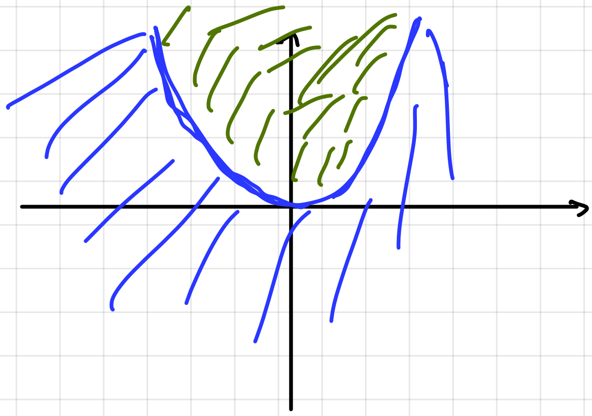
donc $f(u_n) = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 \neq 0 = f(0,0)$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 4

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$



Notons $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0\}$

$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 < 0\}$

$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = 0\}$

Notons $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto y - x^2$

qui est continue car polynomiale

sur Ω_1 $f(x,y) = x^4$ donc continue car polynomiale
sur Ω_2 $f(x,y) = y^2$ donc continue car polynomiale.

Il nous reste à étudier la continuité de f sur la frontière Ω_3.

Soit $X_0 = (x_0, \underset{y_0}{\underbrace{x_0^2}}) \in \Omega_3$ $f(X_0) = (x_0^2)^2 = x_0^4$ car $y_0 = x_0^2$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)$ une suite à valeur dans Ω_1 convergente vers X_0

donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ et $y_n \longrightarrow x_0^2$

$f(u_n) = x_n^4$ car $u_n \in \Omega_1$

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n^4 = x_0^4 = f(X_0)$$ car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$

Donc f est continue du côté Ω_1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)$ une suite à valeurs dans Ω_2 tq $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_0$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \Omega_2$ donc $f(u_n) = y_n^2$
Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_0$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$
et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0^2$

$$f(u_n) = (y_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_0^2)^2 = x_0^4 = f(X_0)$$

Donc f est continue du côté Ω_2
sur Ω_3 f est aussi continue car se comporte de même comme sur Ω_2.

Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 5

$E = C([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad A = \{ f \in E : f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)\,dx \geq 1 \}$

1) Soit une application $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad f \longmapsto f(0)$

Montrons la continuité de g par la caractérisation séquentielle. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans E.

Supposons $\exists f \in E$ tq $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N, \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

c'est-à-dire $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$

donc on a convergence uniforme, d'où $f_n(0) \longrightarrow f(0)$

et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

Or $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ donc $f_n(0) \longrightarrow f(0)$

$g(f_n) = f_n(0)$ convergente vers $f(0)$

donc $\lim_{n\to+\infty} g(f_n) = g(f)$ d'où g continue.

Or $\int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$ donc l'application
$h : E \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad f \longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ est continue

car $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \Rightarrow h(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(f)$

Soit $\Omega_1 = \{ f \in E : f(0) = 0 \} = g^{-1}(\{0\})$ or $\{0\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$ et g est continue, Ω_1 est fermé par l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $\Omega_2 = \{ f \in E : \int_0^1 f(x)\,dx \geq 1 \} = h^{-1}([1, +\infty[)$ donc fermé car l'image réciproque d'un fermé $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par l'application continue h.

On a évidemment $A = \Omega_1 \cap \Omega_2$ donc A est fermé car l'intersection d'un nombre fini des fermés.

2) Soit $f \in A$, supposons $\|f\|_\infty \leq 1$ donc $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 1$

i.e $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1$ $\Longrightarrow$ $\forall x \in [0,1]\ f(x) \leq 1$

$\int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = 1$

Or $1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

$\int_0^1 (1 - f(x))\,dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - 1 = 0$

Or $\forall x \in [0,1]$ $f(x) \leq 1$ et $\int_0^1 1 - f(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 1\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$

D'où $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ ce qui est absurde car par hypothèse $f(0) = 0$.

D'où $\underline{\|f\|_\infty > 1}$

Exercice 6

1a) Soit $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ donc $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \ell$

$\forall n \in \mathbb{N}, -a_n \leq a_n \leq |a_n|$ donc $-\ell \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \ell$

donc $-\ell \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge aussi.

1b) Soit $\lambda \in \mathbb{N}$ et $a = (a_n)$, $b = (b_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$

$\varphi(a + \lambda b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$
$= \varphi(a) + \lambda \varphi(b)$

convergentes d'après 1a)

$\varphi(q_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ où q_n une suite constante nulle. Donc φ linéaire

Soit $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ $|\varphi(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ car converge
$= \|a\|_1$

Donc $\forall a \in \ell^1(\mathbb{N})$ $|\varphi(a)| \leq \|a\|_1$ donc continue

2) $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ donc F est fermé car l'image réciproque d'un fermé par une application continue φ.

Soit $a \in F$
supposons que $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $B(a, \varepsilon) \subset F$

$B(a, \varepsilon) = \{ b \in \ell^1(\mathbb{N}) : \|b - a\| < \varepsilon \}$ et $\varphi(h) \neq 0$
prenons $h \in B(a, \varepsilon)$ tq $\|h\|_1 < \varepsilon$
Soit $b = a + h$ donc $\|b - a\|_1 = \|h\|_1 < \varepsilon$ donc $b \in B(a, \varepsilon)$
$\varphi(b) = \varphi(a) + \varphi(h) \in]1, 1+\varepsilon[\neq 1$ donc $\nexists\, \varepsilon$ tq $B(a, \varepsilon) \subset F$

donc F n'est pas ouvert.

Soit $a = (a_n)$ une suite tq $a_0 = 1 + M$ avec $M \in \mathbb{R}_+$
$a_1 = -M$
$a_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

On a $\varphi(a) = a_0 + a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n = 1 + M - M = 1$

Donc $a \in F$ $\quad \|a\|_1 = |1+M| + |-M| = 1 + 2M$

Or on peut choisir n'importe quel M grand donc F n'est pas borné.