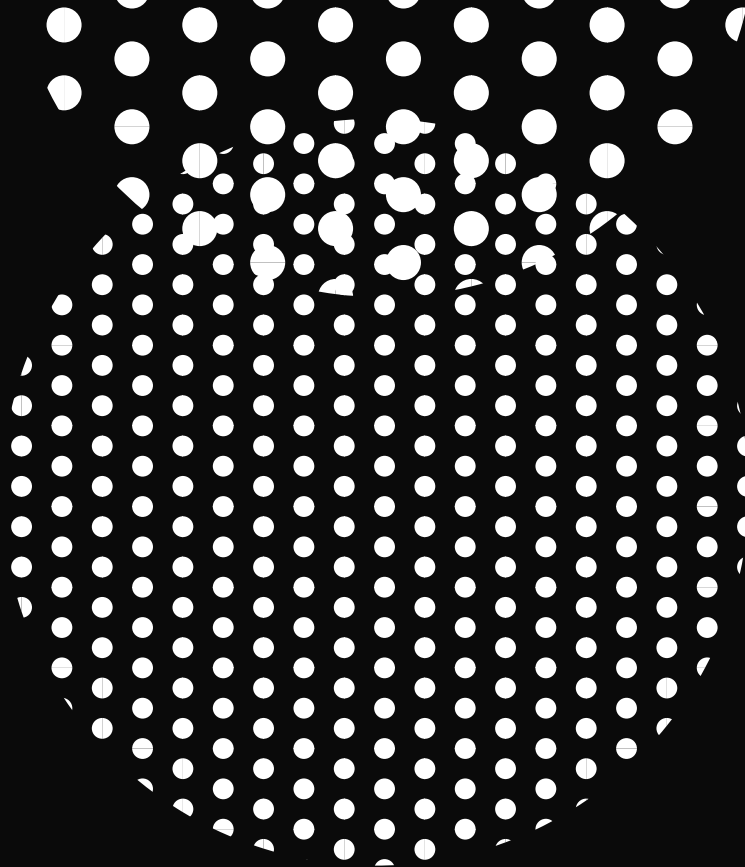




## Exercise 1

Donc  $f(\text{Adh}(A)) \subset \text{Adh}(f(A))$

$$f = \arctan(\mathbb{R}) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Adh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$f(\text{Adh}(\mathbb{R})) = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{Adh}(f(\mathbb{R})) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

donc  $f(\text{Adh}(\mathbb{R})) \subsetneq \text{Adh}(f(\mathbb{R}))$

### Exercice 3

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1]  $d$  est à valeur dans  $\{0, 1\}$  donc définie positive, le plus  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  par définition donc bien définie.

$$d(x, y) = d(y, x) \text{ car l'opérateur binaire } \neq, = \text{ est commutative.}$$

$$\text{si } x = y$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall z$$

$$\text{si } x \neq y$$

$$d(x, y) = 1 = d(x, z) + d(z, y) \text{ car } z \text{ ne peut pas être égale à la fois à } y \text{ et } x.$$

Donc  $d$  est une distance.

$$\text{pour } z = 0 \quad \mathcal{B}(x, z) = \emptyset$$

$$\text{pour } z \in ]0, 1] \quad \mathcal{B}(x, z) = \{y \in E \mid d(x, y) < z \text{ (i.e.) } d(x, y) = 0\} = \{x\}$$

$$\text{pour } z > 1 \quad \mathcal{B}(x, z) = E \text{ car } \mathcal{B}(x, z) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq 1 < z\} = E \text{ car } \forall x, y \quad d(x, y) \leq 1$$

2) Soit  $R = \bigcup_{i \in J} U_i$  un recouvrement ouvert de  $K$  quelconque.  
 Or  $K \subset \mathbb{R}$  donc  $\forall k \in K \exists i_j \in J$  tq  $k \in U_{i_j}$  où  $U_{i_j}$  un ouvert.  
 Or  $K$  fini, donc  $\exists \underbrace{\{i_1, \dots, i_n\}}_{\text{fini}} \subset J$  tq  $K \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$

Donc  $K$  est compact.

3)

$\forall x \in K, \{x\} = B(x, 2)$  avec  $2 = 0.1$

Soit  $\bigcup_{i \in J} U_i$  un recouvrement ouvert de  $K$ .

Donc  $\bigcup_{x \in K} B(x, 2)$  est aussi un recouvrement

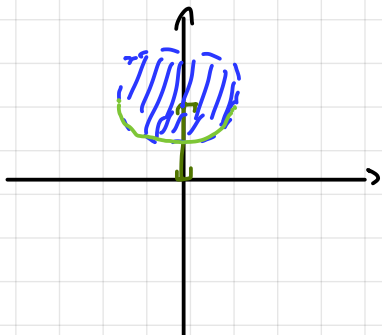
$$= \bigcup_{x \in K} \{x\}$$

ouvert de  $K$ , mais comme  $K$  est infini, il n'y a pas de sous-recouvrement ouvert qui couvre  $K$ , donc  $K$  n'est pas compact.

### Exercice 4

$\mathcal{D}$  est fermé car un produit des fermés

$\mathcal{D}$  est ouvert car l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.



Conjecture.

$$\text{Adh}(\mathcal{D}) = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 \leq \frac{1}{4}\} =: \mathcal{D}$$

$\mathcal{D}$  fermé car l'image réciproque d'un fermé par une application continue. De plus  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$  donc  $\text{Adh}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$

$$\text{Soit } X = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D} \quad \therefore X = \{(x, y) \text{ tq } x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}\}$$

On prend  $X_n = (1 - \frac{1}{n})X \in \mathcal{D}$  car  $< \frac{1}{4}$  mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$   
 d'où  $X \in \text{Adh}(\mathcal{D})$

Donc  $\text{Adh}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$  le plus  $S \subset \text{Adh}(\mathcal{D})$  donc

$$\text{Adh}(\mathcal{D} \cup S) = \text{Adh}(\mathcal{D})$$

$\bigcup \text{Adh}(\mathcal{D})$  est fermé alors c'est une union des fermés

$$\text{Adh}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{D}$$

---

Conjecture :

$$\text{Int}(\mathcal{I}) = \emptyset$$

Soit  $X \in \mathcal{I}$  i.e  $X = (x, y) + \gamma$   $x = 0$  et  $y \in [0, 1]$

Soit  $X_n = (\frac{1}{n}, y) \notin \mathcal{I}$  car  $\frac{1}{n} \neq 0$

$X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$  donc  $X \notin \text{Int}(\mathcal{I})$  donc  $\forall X \in \mathcal{I}, X \notin \text{Int}(\mathcal{I})$

alors  $\text{Int}(\mathcal{I}) = \emptyset$

---

Conjecture

$$\text{Int}(S) = \emptyset$$

Soit  $X \in S$  alors  $X = (x, y) + \gamma$   $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$  et  $y < 1$

On prend  $X_n = (x + \frac{1}{n}, y) \notin S$  car  $(x + \frac{1}{n})^2 + (y-1)^2 > \frac{1}{4}$

Mais  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$  donc  $X \in \text{Adh}(S^c)$  donc  $X \notin \text{Int}(S)$ ,

d'où  $\text{Int}(S) = \emptyset$

$\text{Int}(\mathcal{L}) = \mathcal{D}$  car  $\mathcal{D}$  ouvert.

Exercice 5  $(E, d)$   $K_1, K_2 \subset E$  2 compact.

Soit  $R = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$  un recouvrement ouvert de  $K_1 \cup K_2$ .

donc  $K_1 \subset R$ , comme  $K_1$  compact donc  $\exists \mathcal{I}_1$  fini

$\bigcup_{i \in \mathcal{I}_1} U_i$  couvre  $K_1$ .

idem  $\exists \mathcal{I}_2$  fini  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_2} U_i$  couvre  $K_2$

D'où  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2} U_i = R_1 \cup R_2$  couvre  $K_1 \cup K_2$ , or  $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$  fini, donc

$K_1 \cup K_2$  compact.

Exercice 6.

→ 1

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} ]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[ = \{1\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$   $]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$  est ouvert, mais  $\{1\}$  est fermé car fini.

Exercice 7

1]  $B((1,1), 2) = X$  qui est ouvert dans  $X$   
mais pas dans  $\mathbb{R}^2$

2]  $X$  est ouvert dans  $X$  car  $X \setminus X = \emptyset$  qui est fermé.

mais  $X$  n'est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}^2$

car  $\forall x \in B((1,1), 2) \nexists X$  dans  $(\mathbb{R}^2, d)$

3] Soit  $X_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  pour  $n \geq 1$  dans  $(X, d_2)$

Supposons par l'absurde que  $\exists l \in X$  tq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \quad d(X_n, l) < \varepsilon$$

$$\text{i.e. } d(X_n, l) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soit  $l = (x, y) \in X$  une limite de  $X_n$

$$\text{donc } d(X_n, l) = \sqrt{(\frac{1}{n} - x)^2 + (\frac{1}{n} - y)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{2x}{n} + x^2 + \frac{1}{n^2} - \frac{2y}{n} + y^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

mais  $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$  ssi  $(x, y) = (0, 0)$  ce qui est absurde car  $(0, 0) \notin X$ .

Donc  $X_n$  n'est pas convergente dans  $X$ .

### Exercice 8

1)  $A = f^{-1}([0, +\infty[)$  donc ouvert  
et  $A \subset B$  donc  $A \subset \text{Int}(B)$

2)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$B = \mathbb{R}$$

$$\text{int}(B) = \mathbb{R} \not\subset A$$