



Exercice 1

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$\text{Conjecture: } \begin{aligned} \text{Int}(A) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < 2x^2 + y^2 + z^2 < 1\} = \mathcal{I} \\ \text{Adh}(A) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} = Q \end{aligned}$$

1. Montrer que $\text{Int}(A) = \mathcal{I}$

$$\text{Soit } f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto 2x^2 + y^2 + z^2$$

f est continue car comme des polynômes,
donc, d'après le cours $f^{-1}([0, 1]) = \mathcal{I}$ est ouvert.

De plus $\mathcal{I} \subset A$ donc $\mathcal{I} \subset \text{Int}(A)$.

Il nous reste à montrer que $\text{Int}(A) \subset \mathcal{I}$.

$$\text{Soit } w \in A \setminus \mathcal{I} \quad \text{i.e.} \quad w = (x, y, z) \text{ tq } 2x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\text{Soit } w_n = (x, y, \sqrt{z^2 + \frac{1}{n}}) \quad \text{donc} \quad \begin{aligned} 2x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 &= 2x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{n} > 1 \end{aligned}$$

donc $w_n \notin A$ mais $w_n \rightarrow w \in A$

Donc $w \in \text{Adh}(A^c)$ i.e. $w \notin \text{Int}(A)$.

Ce qui conclut que $\text{Int}(A) = \mathcal{I}$

2. Montrer que $\text{Adh}(A) = Q$

D'après 1, f est continue, donc, comme $[0, 1]$ est fermé, $f^{-1}([0, 1]) = Q$ est aussi fermé.

Or $A \subset Q$ et Q est fermé, donc $\text{Adh}(A) \subset Q$

Montrons $Q \subset \text{Adh}(A)$

Soit $w \in Q$

$$(x, y, z)$$

Si $0 < 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, on prend $w_n = w \in A$, donc $w \in \text{Adh}(A)$

Si $2x^2 + y^2 + z^2 = 0$, donc $w = 0$

prenons $w_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in A$ car $0 < \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{4}{n^2} < 1$

mais $w_n \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{\quad} w$, donc $\forall w \in Q, w \in \text{Adh}(A)$

donc $Q \subset \text{Adh}(A)$. Par conséquent, $Q = \text{Adh}(A)$

3. Par définition $\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A)$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(0, 0, 0)\}$$

$$B = \{(\sin x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$$

Conjecture:

$$\text{Int}(B) = \emptyset$$

$$\text{Adh}(B) = B$$

1. Allg $\text{Int}(B) = \emptyset$

$\emptyset$ est ouvert et $\emptyset \subset B$ donc $\emptyset \subset \text{Int}(B)$

$$\text{Allg } \text{Int}(B) \subset \emptyset$$

Soit $w \in B \setminus \emptyset$ i.e. $w = (\sin x, x)$

Soit $w_n = (\sin x, x + \frac{1}{n}) \notin B$

mais $w_n \longrightarrow w \in B$ donc $w \in \text{Adh}(B^c)$ i.e. $w \notin \text{Int}(B)$

Donc $\text{Int}(B) = \emptyset$

2. Pour montrer que $\text{Adh}(B) = B$ il suffit de montrer que B est fermé.

Soit $x_n \in \mathbb{R}$, $f: x \mapsto \sin x$
et x^* son limite.

Notons $w_n = (\sin x_n, x_n) \in B$.

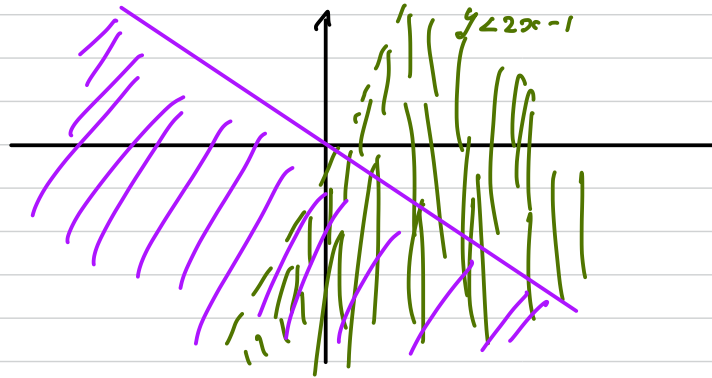
Or f continue, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin x^*$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = (\sin x^*, x^*) \in B$, donc B est fermé et

$$\text{Adh}(B) = B$$

Donc $\partial B = B$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 2x > y+1 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \\ y < 2x-1, y \leq -x$$



$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x + 1 < 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0\}$$

Conjecture:

$$\text{Int}(C) = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x + 1 < 0\}}_{:= \mathcal{O}_1} \cap \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 0\}}_{:= \mathcal{O}_2} = \mathcal{O}$$

Notons $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto y - 2x + 1$ car somme des polynômes.

donc, or $] -\infty, 0[$ est ouvert, donc $\mathcal{O}_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 0[)$ est aussi ouvert par la continuité de f_1 .

De même façon, $\mathcal{O}_2$ est aussi ouvert.

Or $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont ouverts, d'après le cours

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ est aussi ouvert, de plus $\mathcal{O} \subset C$

Donc $\mathcal{O} \subset \text{Int}(C)$

Soit $w \in C \setminus \mathcal{O}$ i.e $w = (x, y) \in C$ tq $x + y = 0$ i.e $y = -x$
i.e $w = (x, -x)$

Soit $w_n = (x + \frac{1}{n}, -x) \in C$ car $x + \frac{1}{n} - x > 0$

$w_n \rightarrow w \in C$ donc $w \in \text{Int}(C)$

Donc $\mathcal{O} = \text{Int}(C)$

Conjecture:

$$\text{Adh}(C) = \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x + 1 \leq 0\}}_{:= Q_1} \cap \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0\}}_{:= Q_2} = Q$$

$] -\infty, 0]$ est fermé et f_1, f_2 continues, donc

$$Q_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 0]) \quad Q_2 = f_2^{-1}(]-\infty, 0])$$

sont fermés.

Donc $Q_1 \cap Q_2 =: Q$ est aussi fermé

$Q_2 \subset Q$, donc $\text{Adh}(C) \subset Q$.

Il nous reste à montrer que $Q \subset \text{Adh}(C)$

Soit $w \in Q$, si $w \in C$, évidemment $w \in \text{Adh}(C)$

donc supposons que $w \in Q \setminus C$ i.e

$$w = (x, y) \in Q \quad \text{et} \quad y - 2x + 1 = 0$$

$$\text{Soit } w_n = (x, y - \frac{1}{n}) \quad \text{on a} \quad \underbrace{y - \frac{1}{n}}_{> 0} - 2x + 1 < 0$$

$$\text{donc } w_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{donc } w \in \text{Adh}(C) \quad \forall w \in Q$$

$$\text{Alors } Q \subset \text{Adh}(C)$$

Par conséquent $\text{Adh}(C) = Q$.

$$\partial C = \text{Adh}(C) \setminus \text{Int}(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y + 1, x + y = 0\}$$

Exercice 2

$\mathbb{N}$

Montrons que $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$,
i.e montrons que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est ouvert.

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\dots$$

$$=]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$$

$]-\infty, 0[$ est ouvert.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad]n, n+1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.

D'après le cours, l'union quelconque d'ouverts est ouvert. D'où $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] =: Q$$

Q n'est pas ouvert car $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B(0, \varepsilon) \not\subset Q$.

Supposons par l'absurde que Q est fermé, i.e
 $Q = \text{Adh}(Q)$

donc pour toute suite convergente d'éléments de Q
sa limite appartient aussi à Q .

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n := 1 - \frac{1}{n}$
évidemment, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in Q$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \quad \text{donc} \quad 1 \in Q \quad \text{donc} \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \text{t.q.} \quad 1 \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \quad \text{i.e.} \quad \begin{matrix} 1 > 0 \\ 1 < 1 - \frac{1}{n} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 0 < -\frac{1}{n}$$

mais $\frac{1}{n} > 0$, donc $-\frac{1}{n} < 0$

donc $\rightarrow$ l'absurde.

D'où Q n'est pas fermé.

Exercice 3

Soit $A \subset \mathbb{R}$ majorée et minorée

$$\text{i.e. } \exists q, l \text{ tq } \forall x \in A, \quad x \geq q \quad x \leq l$$

Notons $m = \inf A$ i.e. m est le plus grand grand minorant i.e. $\forall y > m, y \in A$ ou $y \geq \sup A$

Notons $M = \sup A$ i.e. M est le plus petit majorant, i.e. $\forall y < M, y \in A$ ou $y \leq \inf A$

Si: $m = M$ donc $A = \{M\}$ donc $\text{Adh}(A) = A$ et $\inf(A) \in \text{Adh}(A)$ et $\sup(A) \in \text{Adh}(A)$

sinon: $m < M$

Donc notons $u_n = m + \frac{1}{n} > m$ donc $u_n \in A$ ou $u_n > M$
 $\exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq N, u_n < M$ et $u_n \rightarrow m$ donc
i.e. $u_n \in A$ $m \in \text{Adh}(A)$

de même avec M . 13

Exercice 3 version 2

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \text{Adh}(A)$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
 $\text{i.e. } \exists x - \varepsilon, x + \varepsilon$

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon \cap A \neq \emptyset$

Soit $\varepsilon > 0$,

Or $\sup A$ est le plus petit majorant, donc

$\sup A - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant,

donc $\exists a \in A \text{ tq } \sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$

donc $a \in]\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon[\cap A$

donc $\sup A \in \text{Adh}(A)$.

Montrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \inf A - \varepsilon, \inf A + \varepsilon \cap A \neq \emptyset$

Soit $\varepsilon > 0$,

Or $\inf A$ est le plus grand minorant, donc

$\inf A + \varepsilon$ ne peut pas être un minorant

donc $\exists a \in A \text{ tq } \inf A \leq a < \inf A + \varepsilon$

donc $a \in]\inf A - \varepsilon, \inf A + \varepsilon[\cap A$ donc $\inf A \in \text{Adh}(A)$

Exercice 4

$$\begin{aligned} 1) \mathcal{B}_E(x, z) &= \{y \in E : d(x, y) < z\} \\ &= \{y \in E : |x - y| < z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x - y < z &\Rightarrow y > x - z \\ -x + y < z &\Rightarrow y < x + z \end{aligned}$$

Or y doit aussi appartenir à $]0, 1[$

$$\text{donc } y > 0 \quad \text{et } y < 1$$

$$\text{Donc } \mathcal{B}_E(x, z) =]\max(x - z, 0), \min(x + z, 1)[$$

2) A est ouvert si $\forall a \in A, \exists z > 0$ tq $\mathcal{B}_E(a, z) \subset A$
Soit $z > 0$

$$\text{si } z \geq \frac{1}{2} \quad \mathcal{B}_E\left(\frac{1}{2}, z\right) =]0, 1[\not\subset A$$

$$\text{si } z < \frac{1}{2} \quad \mathcal{B}_E\left(\frac{1}{2}, z\right) =]\frac{1}{2} - z, \frac{1}{2} + z[$$

$$\frac{1}{2} + z > \frac{1}{2} \quad \text{donc } \mathcal{B}_E\left(\frac{1}{2}, z\right) \not\subset A \quad \forall z > 0$$

donc A n'est pas ouvert.

$$\text{Étudions } A^c = E \setminus A =]\frac{1}{2}, 1[$$

$$\text{Soit } x \in]\frac{1}{2}, 1[$$

$$\text{Notons } p = \min(1 - x, x - \frac{1}{2})$$

$$\text{Or } p > 0 \text{ et } p < 1$$

$$\mathcal{B}_E\left(x, \frac{p}{2}\right) =]x - \frac{p}{2}, x + \frac{p}{2}[$$

$$\frac{p}{2} < x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{p}{2} < 1 - x$$

$$\text{donc } x - \frac{p}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } x + \frac{p}{2} < 1$$

donc $\mathcal{B}_E(x, \frac{p}{2}) \subset A^c$ donc A^c est ouvert,
alors par définition A est fermé.

Or A est fermé, donc $\text{Adh}(A) = A$

Conjecture: $\text{Int}(A) =]0, \frac{1}{2}[=: \mathcal{I}$

$\mathcal{I} \subset A$. Soit $x \in \mathcal{I}$ notons $p = \min(x, \frac{1}{2} - x)$

$$\frac{p}{2} < \frac{1}{2} - x \quad \frac{p}{2} \leq x$$

$$x + \frac{p}{2} < \frac{1}{2} \quad x - \frac{p}{2} > 0$$

Donc $B_E(x, \frac{p}{2}) \subset \mathcal{I}$ donc $\mathcal{I}$ est ouvert, alors

$$\mathcal{I} \subset \text{Int}(A)$$

Soit $w \in A \setminus \mathcal{I}$ donc $w = \frac{1}{2}$

Notons $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} \notin A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ car $\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

mais $w_n \longrightarrow w \in A$ donc $w_n \in \text{Adh}(E \setminus A)$

donc $w \notin \text{Int}(A)$

$$\text{Donc } \text{Int}(A) =]0, \frac{1}{2}[$$

$$\partial A = \text{Adh}(A) \setminus \text{Int}(A) = \{\frac{1}{2}\}$$

Exercice 5.

$$\Downarrow d_0(P, Q) = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |P(x) - Q(x)|$$

$$\forall P, Q \in E \quad |P - Q| = |(-1)(P - Q)| \quad \text{par val. abs.}$$

$$= |-P + Q| = |Q - P|$$

donc

$$d_0(P, Q) = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |P(x) - Q(x)| = \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |Q(x) - P(x)| = d_0(Q, P)$$

$$\text{donc } d_0(P, Q) = d_0(Q, P)$$

$\forall P, Q \quad |P - Q| \geq 0$ donc

d_0 est toujours positive.

Si $P = Q$ donc $|P(x) - Q(x)| = 0 \quad \forall x$, donc

$$d_0(P, Q) = 0$$

Soit $d_0(P, Q) = 0$ i.e. $\sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |P(x) - Q(x)| = 0$ i.e. $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

$|P(x) - Q(x)| = 0$
Donc $P(x) - Q(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \frac{1}{2}]$ (infinitement de 0),
mais tout polynôme a un nombre fini de 0, donc

$P(x) - Q(x)$ est un polynôme nul, donc $P = Q$

Soient P, Q, R

$$\begin{aligned} \forall x, |P(x) - Q(x)| &= |P(x) - R(x) + (R(x) - Q(x))| \leq |P(x) - R(x)| + |R(x) - Q(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |P(x) - R(x)| + \sup_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |R(x) - Q(x)| \\ &\stackrel{''}{=} d_0(P, R) + d_0(R, Q) \end{aligned}$$

$$\text{donc } d_0(P, Q) \leq d_0(P, R) + d_0(R, Q) \quad \forall P, R, Q \in E.$$

donc d_0 est bien une distance sur E .

2) $\forall P, Q \in E$

$$d_1(P, Q) := \begin{cases} \deg(P - Q) + 1 & \text{si } P \neq Q \\ 0 & \text{si } P = Q \end{cases}$$

$P - Q$ est aussi un polynôme

donc $\forall P, Q \in E \quad \deg(P - Q) \geq 0 \Rightarrow \deg(P - Q) + 1 \geq 1$

donc $d_1(P, Q)$ est positive.

par définition $d_1(P, Q) = 0$ si $P = Q$

Or $P - Q$ est aussi un polynôme,
 donc la multiplication par une
 constante ne change pas le degré
 donc $\deg(P - Q) = \deg(Q - P)$

$$\text{donc } \begin{array}{ll} \forall P \neq Q & d_1(P, Q) = \deg(P - Q) + 1 = \deg(Q - P) + 1 = d_1(Q, P) \\ \text{si } P = Q & d_1(P, Q) = 0 = d_1(Q, P) \end{array}$$

donc d_1 est symétrique.

Soient P, Q, R

$$P - R + R - Q = P - Q$$

notons

$$m = \deg(P - R)$$

$$n = \deg(R - Q)$$

$$p = \deg(P - Q) \leq \max(m, n)$$

$$d_1(P, R) = m + 1$$

$$d_1(R, Q) = n + 1$$

$$d_1(P, R) + d_1(R, Q) = m + n + 2$$

$$d_1(P, Q) = \max(m, n) + 1 \leq m + n + 2 \quad \text{car} \quad \max(m, n) \leq m + n \\ = d_1(P, R) + d_1(R, Q)$$

si $P \neq Q$

si $P = Q$

$$d_1(P, Q) = 0 \leq d_1(P, R) + d_1(R, Q) \quad \text{trivialement.}$$

$$\text{Donc } \forall P, R, Q \quad d_1(P, Q) \leq d_1(P, R) + d_1(R, Q)$$

Donc d_1 est bien une distance.

Exercice 6

1) Soit $w \in \text{Adh}(A \cap B)$

donc $\exists (u_n) \in A \cap B \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{tq}$

$$u_n \longrightarrow w$$

$$\text{Or } u_n \in A \cap B \Rightarrow u_n \in A$$

Donc $w \in \text{Adh}(A)$

De plus $u_n \in A \cap B \Rightarrow u_n \in B$
donc $w \in \text{Adh}(B)$

Donc $\forall w \in \text{Adh}(A \cap B), \quad w \in \text{Adh}(A)$
et $w \in \text{Adh}(B)$

$$\text{donc } w \in \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

$$\text{Donc } \text{Adh}(A \cap B) \subset \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$$

2)

$$\begin{array}{cc}]1, 2[&]2, 3[\\ A & B \end{array}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\text{Adh}(A \cap B) = \emptyset \quad \text{car } A \cap B \text{ est fermé.}$$

$$\text{Adh}(A) = [1, 2]$$

$$\text{Adh}(B) = [2, 3]$$

$$\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \{2\} \neq \text{Adh}(A \cap B) = \emptyset$$