Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ v.a. réelles et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^0,

on suppose $X_n \xrightarrow{loi} X$. Montrons que $f(X_n) \xrightarrow{loi} f(X)$

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^0 bornée, alors pour $Y_n = f(X_n)$ $n\geq 1$, $Y = f(X)$

$$E[g(Y_n)] = E[\underbrace{g\circ f}_{C^0,\text{ bornée}}(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} E[g\circ f(X)] = E[g(Y)]$$

car $\begin{cases} g\circ f \ C^0 \text{ bornée} \\ X_n \to X \text{ en loi} \end{cases}$

Donc $Y_n \to Y$ en loi

<u>Q°:</u> Trouver des X_n, X, f tq

- $X_n \xrightarrow{loi} X$
- f pas continue et $f(X_n) \overset{loi}{\not\to} f(X)$

$\Omega = (\{0\}, \{\emptyset, \{0\}\}, P)$

Si $X_n(\omega) = \frac{1}{n}$ pour tout $\omega\in\Omega$, $n\geq 1$ $E[g(X_n)] = \int \underbrace{g(X_n(\omega))}_{\geq g(\frac{1}{n})} dP(\omega)$

$\geq g(\frac{1}{n}) \int 1 \, dP(\omega)$
$= g(\frac{1}{n})$

et $X(\omega) = 0$

Alors $X_n \xrightarrow{loi} X$

$E[g(X_n)] = g(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(0) = E[g(X)]$ $\quad$ g C^0 par hyp

Mais $f(X_n) \overset{loi}{\not\to} f(X)$ $\quad$ $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$

car $E[g(f(X_n))] = E[g(1)] = g(1) \not\to g(0) = E[g(f(X))]$

Exercice 3

1) Si X à densité f C^0, mq : $\int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty (1-F_X(x))dx$

Soit X v.a réelle à valeurs ≥ 0

On a :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, dP_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x 1 \, dt\right) dP_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\underset{\{t \leq x\}}{\{x \geq t\}}} \, dt\right) dP_X(x)$$

Fubini $= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t,+\infty[}(x) \, dP_X(x)\right) dt$

Or $\int \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$, pour tout $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espace proba

et tout $A \in \mathcal{F}$

Soit : $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t,+\infty[} dP_X(x) = P_X([t,+\infty[) \underset{\text{Si } P(X=t)=0}{\begin{cases} = 1 - P(X<t) \\ = 1 - F_X(t) \end{cases}}$

On note $A = \{t \in \mathbb{R} : P(X=t) > 0\}$

On a donc

$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t,+\infty[} \, dP_X\right) dt$ les intégrales sont égales sur $\mathbb{R} \setminus A$ et $Leb(A)=0$

$= \int_0^\infty (1 - F_X(t)) \, dt$

<u>preuve</u> :

pour tout $J \subset A$, J fini $\sum_{t \in J} P(X=t) = P(X \in J) \leq 1$

Donc $(P(X=t), t \in A)$ sommable.

2. Si X à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$E[X] = \sum_{k \geq 0} P(X \geq k)$$

<u>preuve</u> :

$$\sum_{k \geq 0} P(X \geq k) = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X=j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} P(X=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} j P(X=j) = E[X$$

3. $$E[X^p] = \int_{\mathbb{R}} x^p \, d P_X(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x t p t^{p-1} \, dt \right) d P_X(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} p t^{p-1} \mathbb{1}_{\{x \geq t\}} \, dt \right) d P_X(x)$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[t, +\infty[}(x) \, d P_X(x) \right) p t^{p-1} \, dt$$
$$= \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) \, p t^{p-1} \, dt$$

<u>Exercice 4</u>